

УДК 629.7.052

ТЕОРЕМА О ПЛОСКОСТЯХ n -СИММЕТРИИ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА*Ал.А. Шум¹, А.М. Ветошкин²*¹ *Тверской государственный технический университет (г. Тверь),*² *Мытищинский филиал Московского государственного
технического университета им. Н.Э. Баумана
(г. Мытищи, Московская область)*

© Шум Ал.А., Ветошкин А.М., 2026

Аннотация. Рассмотрено понятие момента n -го порядка выпуклого тела относительно заданной плоскости. Плоскость является плоскостью n -симметрии в случае, если моменты n -го порядка двух подтел, на которые исходное тело делится этой плоскостью, одинаковы. Установлено, что момент n -го порядка выпуклого тела относительно плоскости Π , которая проводится параллельно данной плоскости, достигает наименьшего значения тогда, когда Π представляет собой плоскость $(n - 1)$ -симметрии данного тела.

Ключевые слова: момент n -ного порядка, плоскость n -симметрии, плоскость полумасс, выпуклое тело, функция плотности, масса, центр масс, центр полумасс, электрическая машина.

DOI: 10.46573/2658-7459-2026-1-69-76

ВВЕДЕНИЕ

Выбор методов и технологий при изготовлении и балансировке детали электрической машины требует учета распределения массы внутри рассматриваемой детали. Такой выбор может быть непростым, поскольку спектр технологий и методов механической и физико-технической обработки деталей машин весьма разнообразен (см., например, работы [1–13]). Между тем, поскольку распределение массы внутри детали определяется соответствующей функцией плотности, представляет интерес изучение этой функции и тех ее свойств, которые связаны с тем или иным видом симметрии. В статье [22] предметом исследования была одномерная деталь (*линейный стержень*), а соответствующая функция плотности являлась функцией одной переменной. В работах [14, 16, 17, 20, 23] рассматривались плоские детали (*пластины*), и соответствующая функция плотности была функцией двух переменных. В статьях [15, 18, 19, 21] в качестве деталей рассматривались уже *пространственные тела*, и функция плотности представляла собой функцию трех переменных. Настоящая работа продолжает исследования пространственных тел, однако она опирается на результаты, полученные при изучении плоских пластин. Доказанная в работе [22] теорема о линиях n -симметрии плоской пластины, переносится в данной работе на случай плоскостей n -симметрии пространственного тела.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБОСНОВАНИЯ

Рассматривается трехмерное евклидово пространство с заданной прямоугольной декартовой системой координат. Под *областью* понимается замкнутая область этого пространства, ограниченная некоторой поверхностью (*границей*), которая также считается частью области. Точки области, не принадлежащие границе, являются *внутренними*. Область называется *выпуклой*, если всякая прямая, проведенная через любую ее внутреннюю точку, пересекает границу этой области ровно в двух точках. Область V_1 называется *подобластью* области V , если $V_1 \subseteq V$.

Область V вместе с определенной в этой области непрерывной неотрицательной функцией трех переменных $f(x, y, z)$ называется *телом* D , при этом функция $f(x, y, z)$ представляет собой *функцию плотности* тела D . Подобласть области V вместе с соответствующим ограничением функции плотности $f(x, y, z)$ это *подтело* тела D . Масса тела D , в соответствии с традиционным определением, это

$$m(D) = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz .$$

Следует отметить, что функция плотности $f(x, y, z)$ определением объявлена неотрицательной, а значит, в некоторых точках области V она может обращаться в нуль. Однако в настоящей статье (так же, как и в работе [18]) предполагается выполненным обязательное дополнительное условие: масса самого тела D , а также масса всякого его подтела должны быть больше нуля.

Тело D является *выпуклым*, если соответствующая область V выпукла. Отметим, что в рамках данной статьи рассматриваются выпуклые тела.

Пусть имеются плоскость Π и тело D с областью V и функцией плотности $f(x, y, z)$ (рис. 1). В соответствии с определениями из работы [18] *моментом n -го порядка тела D относительно плоскости Π* называется

$$M_n(D) = \iiint_V (r(x, y, z))^n f(x, y, z) dx dy dz ,$$

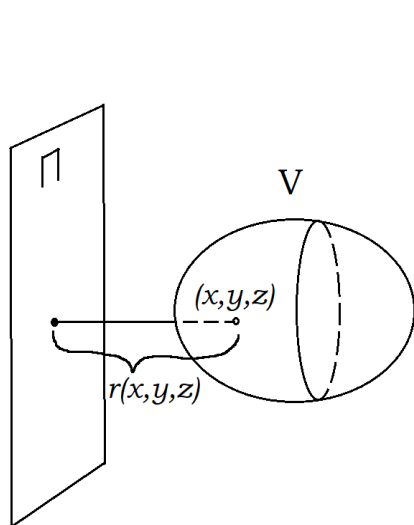
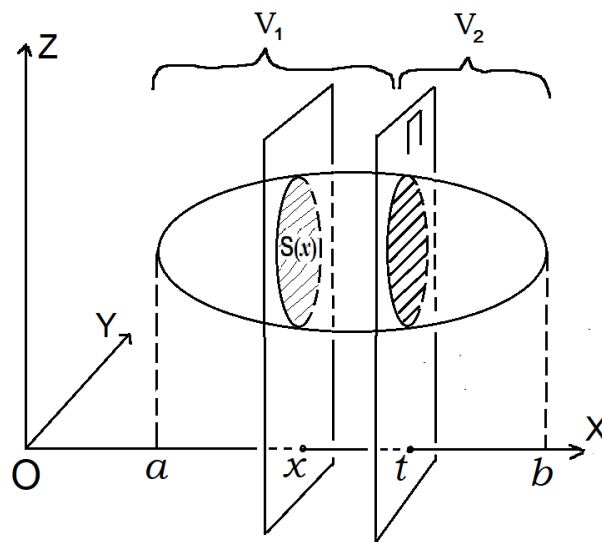
где n – произвольное неотрицательное целое число, а $r(x, y, z)$ – расстояние от точки (x, y, z) до плоскости Π (можно заметить, что значение момента $M_n(D)$ не зависит от выбора системы координат, поскольку функция $f(x, y, z)$ и функция $r(x, y, z)$ при заданной плоскости Π являются функциями точки тела).

Момент нулевого порядка тела D не зависит от положения плоскости Π и равен массе тела D : $M_0(D) = \iiint_V (r(x, y, z))^0 f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = m(D)$.

Момент первого порядка тела D относительно плоскости Π есть *статический момент* тела D относительно плоскости Π : $M_1(D) = \iiint_V r(x, y, z) f(x, y, z) dx dy dz$.

Момент второго порядка тела D относительно плоскости Π есть *момент инерции* тела D относительно плоскости Π : $M_2(D) = \iiint_V (r(x, y, z))^2 f(x, y, z) dx dy dz$.

Пусть теперь плоскость Π делит тело D на два подтела D_1 и D_2 с областями соответственно V_1 и V_2 так, как это показано на рис. 2. В соответствии с определениями, рассмотренными в работе [18], плоскость Π является *плоскостью n -симметрии тела D* , если $M_n(D_1) = M_n(D_2)$. Таким образом, плоскость представляет собой *плоскость n -симметрии тела*, если она делит его на два подтела так, что моменты n -го порядка этих подтел относительно данной плоскости одинаковы.

Рис. 1. Плоскость Π и область V Рис. 2. Плоскость Π и области V_1 и V_2

Как отмечено в [18], плоскости 0-симметрии тела (делящие его на два подтела одинаковой массы) представляют собой *плоскости полумасс*, а плоскости 1-симметрии (делящие его на два подтела с равными статическими моментами) представляют собой *плоскости равновесия*. Плоскости 2-симметрии тела – это плоскости, которые делят тело на два подтела с равными моментами инерции. Точка пересечения всех плоскостей n -симметрии тела является *центром n -симметрии данного тела*. Таким образом, центр 0-симметрии тела оказывается его *центром полумасс*, а центр 1-симметрии тела – его *центром масс*. Как установлено в [15], центр 1-симметрии всегда существует, в то время как центр 0-симметрии может не существовать. Там же показано, что в случае, когда существуют оба эти центра симметрии, они могут не совпадать.

В работе [18] установлено, что для каждого целого неотрицательного числа n , любого тела D и произвольно проведенной плоскости существует единственная *плоскость n -симметрии тела D* , параллельная заданной плоскости.

Цель настоящей работы – доказать, что справедлива следующая

Теорема. Момент n -ного порядка (при $n > 0$) выпуклого тела D относительно плоскости Π , проводимой параллельно заданной плоскости, достигает наименьшего значения тогда, когда плоскость Π представляет собой плоскость $(n - 1)$ -симметрии тела D .

Для доказательства теоремы понадобится следующая техническая лемма, установленная в работе [22]:

Лемма. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $n > 0$, то

$$a) \left(\int_a^t (t-x)^n f(x) dx \right)' = n \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x) dx;$$

$$б) \left(\int_b^t (x-t)^n f(x) dx \right)' = -n \int_b^t (x-t)^{n-1} f(x) dx.$$

Доказательство теоремы.

Не ограничивая общности, можно считать, что та плоскость, параллельно которой проводится плоскость Π , есть координатная плоскость OYZ заданной в пространстве прямоугольной декартовой системы координат. Пусть плоскость Π , разбивающая тело D на два подтела D_1 и D_2 с областями соответственно V_1 и V_2 , проходит через точку t на оси OX (так, как это показано на рис. 2). Тогда момент n -го порядка тела D относительно плоскости Π может быть представлен следующим образом:

$$\begin{aligned} M_n(D) &= M_n(D_1) + M_n(D_2) = \\ &= \iiint_{V_1} (r(x, y, z))^n f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{V_2} (r(x, y, z))^n f(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \iiint_{V_1} |x-t|^n f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{V_2} |x-t|^n f(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \iiint_{V_1} (t-x)^n f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{V_2} (x-t)^n f(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

Очевидно, что $M_n(D)$ оказывается функцией, зависящей от переменной $M_n(D) = M_n(t)$.

Запишем теперь эту функцию, обозначив через $S(x)$ сечение области V тела D вертикальной плоскостью $x = \text{const}$:

$$\begin{aligned} M_n(t) &= \int_a^t dx \iint_{S(x)} (t-x)^n f(x, y, z) dy dz + \int_t^b dx \iint_{S(x)} (x-t)^n f(x, y, z) dy dz = \\ &= \int_a^t (t-x)^n dx \iint_{S(x)} f(x, y, z) dy dz + \int_t^b (x-t)^n dx \iint_{S(x)} f(x, y, z) dy dz = \\ &= \int_a^t (t-x)^n F(x) dx + \int_t^b (x-t)^n F(x) dx, \end{aligned}$$

где $F(x) = \iint_{S(x)} f(x, y, z) dy dz$ – функция, непрерывная на отрезке $[a; b]$.

Функция $M_n(t)$ дифференцируема на отрезке $[a; b]$, и ее экстремум на этом отрезке можно отыскивать, используя производную:

$$M_n'(t) = \left(\int_a^t (t-x)^n F(x) dx + \int_t^b (x-t)^n F(x) dx \right)' = \left(\int_a^t (t-x)^n F(x) dx - \int_b^t (x-t)^n F(x) dx \right)'.$$

Применив приведенную выше лемму, получим:

$$\begin{aligned} M_n'(t) &= n \int_a^t (t-x)^{n-1} F(x) dx + n \int_b^t (x-t)^{n-1} F(x) dx = n \int_a^t (t-x)^{n-1} F(x) dx - n \int_t^b (x-t)^{n-1} F(x) dx = \\ &= n \int_a^t (t-x)^{n-1} dx \iint_{S(x)} f(x, y, z) dy dz - n \int_t^b (x-t)^{n-1} dx \iint_{S(x)} f(x, y, z) dy dz = \\ &= n \iiint_{V_1} (t-x)^{n-1} f(x, y, z) dx dy dz - n \iiint_{V_1} (x-t)^{n-1} f(x, y, z) dx dy dz = nM_{n-1}(D_1) - nM_{n-1}(D_2). \end{aligned}$$

Теперь, приравнявая $M_n'(t)$ нулю, находим, что экстремум функции $M_n(t)$ приходится на то положение плоскости Π , при котором $M_{n-1}(D_1) = M_{n-1}(D_2)$, а это значит, что Π является плоскостью $(n-1)$ -симметрии тела D . Очевидно, что данный экстремум единственный для функции $M_n(t)$ на отрезке $[a; b]$. Осталось только подтвердить, что он представляет собой минимум. Это можно сделать, найдя вторую производную функции $M_n(t)$ при помощи той же леммы. Если $n > 1$, то

$$\begin{aligned} M_n''(t) &= \left(n \int_a^t (t-x)^{n-1} F(x) dx + n \int_b^t (x-t)^{n-1} F(x) dx \right)' = \\ &= n(n-1) \int_a^t (t-x)^{n-2} F(x) dx - n(n-1) \int_b^t (x-t)^{n-2} F(x) dx = \\ &= n(n-1) \int_a^t (t-x)^{n-2} F(x) dx + n(n-1) \int_t^b (x-t)^{n-2} F(x) dx = \\ &= n(n-1) \int_a^t (t-x)^{n-2} dx \iint_{S(x)} f(x, y, z) dy dz + n(n-1) \int_t^b (x-t)^{n-2} dx \iint_{S(x)} f(x, y, z) dy dz = \\ &= n(n-1) \iiint_{V_1} (t-x)^{n-2} f(x, y, z) dx dy dz + n(n-1) \iiint_{V_2} (t-x)^{n-2} f(x, y, z) dx dy dz = \\ &= n(n-1)M_{n-2}(D_1) + n(n-1)M_{n-2}(D_2). \end{aligned}$$

Очевидно, что это выражение больше нуля при любом $t \in [a; b]$, что означает вогнутость графика функции $M_n(t)$. Отсюда следует, что рассматриваемый экстремум есть минимум. В случае $n = 1$

$$M_1''(t) = \left(\int_a^t F(x) dx + \int_b^t F(x) dx \right)' = F(t) + F(t) = 2F(t).$$

Функция $F(t)$ в силу своего определения неотрицательна на отрезке $[a; b]$ и притом может обращаться в нуль только в отдельных изолированных точках этого отрезка (последнее есть следствие требования, что масса всякого подтела тела D должна быть больше нуля). Следовательно, тем же свойством обладает и функция $M_1''(t)$. Поэтому функция $M_1'(t)$ строго возрастает и обращается в нуль в единственной точке, а именно в той, для которой выполнено равенство $M_0(D_1) = M_0(D_2)$. Таким образом, и для случая $n = 1$ утверждение теоремы справедливо.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теорема, доказанная в настоящей работе для пространственного тела (т. е. для трехмерного случая), имеет свои отчетливые аналоги как для плоской пластины (двумерный случай), так и для линейного стержня (одномерный случай). Соответствующая теорема для линейного стержня установлена в работе [22], а более сложная теорема для случая плоской пластины доказана в работе [23]. Каждая из этих теорем представляет собой значимый результат, устанавливающий нетривиальную связь между симметриями соседних уровней.

Понятие n -симметрии является обобщением рассмотренных в работах [14–16] понятий s -симметрии (которая представляет собой 0-симметрию) и c -симметрии (которая представляет собой 1-симметрию). Теорема, доказанная в данной работе (так же, как и подобные теоремы из источников [22] и [23]), помимо прочего, показывает, как переход к рассмотрению общих понятий n -симметрии, предложенный в работах [16–18], позволяет выявить такие связи между этими видами симметрии, которые не могут быть в полной мере видны при изучении только частных случаев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Электрофизические и электрохимические методы обработки материалов: учебное пособие: в 2 т. / Б.А. Артамонов [и др.]. М.: Высшая школа, 1983. Т. 1. 247 с.
2. Верещака А.С. Работоспособность режущего инструмента с износостойкими покрытиями. М.: Машиностроение, 1993. 336 с.
3. Вороничев Н.М., Тартаковский Ж.Э., Генин В.Б. Автоматические линии из агрегатных станков. М.: Машиностроение, 1979. 487 с.
4. Дальский А.М., Гаврилюк В.С. Механическая обработка материалов: учебное пособие для вузов. М.: Машиностроение, 1981. 266 с.
5. Немилов Е.Ф. Электроэрозионная обработка материалов. Л.: Машиностроение, 1983. 160 с.

6. Подураев В.Н. Автоматически регулируемые и комбинированные процессы резания. М.: Машиностроение, 1977. 303 с.
7. Силин С.С. Метод подобия при резании материалов. М.: Машиностроение, 1979. 152 с.
8. Старков В.К. Обработка резанием. Управление стабильностью и качеством в автоматизированном производстве. М.: Машиностроение, 1989. 297 с.
9. Трент Е.М. Резание металлов. М.: Машиностроение, 1980. 263 с.
10. Участки для электроэрозионной обработки рабочих деталей вырубных штампов и прессформ. М.: ОНТИ ЭНИМС, 1983. 47 с.
11. Этин А.О. Кинематический анализ и выбор эффективных методов обработки лезвийным инструментом. М.: Машгиз, 1953. 173 с.
12. Янюшкин А.С., Шоркин В.С. Контактные процессы при электроалмазном шлифовании. М.: Машиностроение-1, 2004. 230 с.
13. Ящерицын П.И., Фельдштейн Е.Э., Корниевич М.А. Теория резания. Минск: Новое знание, 2006. 512 с.
14. Шум Ал.А. О центрах симметрии функции двух переменных // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2016. Вып. 30. С.19–23.
15. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. О центрах симметрии функции трех переменных // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2020. № 1 (5). С. 71–78.
16. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Моменты плоской пластины относительно прямой и некоторые вопросы симметрии // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2021. № 2 (10). С. 78–84.
17. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. О центрах симметрии плоской выпуклой пластины // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2021. № 3 (11). С. 65–72.
18. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. О понятии n -симметрии пространственного тела // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2022. № 3 (15). С. 66–72.
19. Шум Ал.А., Ветошкин А.М. О центрах симметрии выпуклого пространственного тела // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2023. № 2 (18). С. 64–72.
20. Шум Ал.А., Ветошкин А.М. Теорема о центре n -симметрии плоской выпуклой пластины // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2023. № 3 (19). С. 75–82.
21. Шум Ал.А., Ветошкин А.М. Теорема о центре n -симметрии выпуклого пространственного тела // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2023. № 4 (20). С. 76–82.
22. Шум Ал.А., Ветошкин А.М. Заметка об n -симметрии линейного стержня // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2024. № 2 (22). С. 63–71.
23. Шум Ал.А., Ветошкин А.М. Теорема о линиях n -симметрии выпуклой плоской пластины // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2025. №1 (25). С. 74–81.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ШУМ Александр Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет», 170026, Россия, г. Тверь, наб. А. Никитина, д. 22. E-mail: shum@tstu.tver.ru

ВЕТОШКИН Александр Михайлович – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики, информатики и вычислительной техники, Мытищинский филиал Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, 141005, Россия, Московская область, г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, 1. E-mail: vetkin@mgul.ac.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Шум Ал.А., Ветошкин А.М. Теорема о плоскостях n -симметрии выпуклого тела // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии». 2026. № 1 (29). С. 69–76.

THE n -SYMMETRY PLANES THEOREM OF A CONVEX BODY

Al.A. Shum¹, A.M. Vetoshkin²

¹ *Tver State Technical University (Tver),*

² *Mytishchi filial of MSTU named after N.E. Bauman
(Mytishchi city, Moscow region)*

Abstract. The concept of a moment of the n -th order of a convex body relative to a given plane is considered. A plane is a plane of n -symmetry if the moments of the n -th order of the two sub-bodies into which the initial body is divided by this plane are the same. It is established that the moment of the n -th order of a convex body relative to the plane Π , drawn parallel to a given plane, reaches the smallest value when the plane Π is the plane of $(n - 1)$ -symmetry of this body.

Keywords: moment of n -th order, plane of n -symmetry, plane of half-mass, convex body, density function, mass, center of mass, center of half-mass, electric machine.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

SHUM Alexander Anatolievich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Tver State Technical University, 22, embankment of A. Nikitin, Tver, 170026, Russia. E-mail: shum@tstu.tver.ru

VETOSHKIN Alexander Mikhailovich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Informatics and Computer Engineering, MF Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, 1, 1st Institutskaya street, Mytishchi city, Moscow region, 141005, Russia. E-mail: vetkin@mgul.ac.ru

CITATION FOR AN ARTICLE

Shum Al.A., Vetoshkin A.M. The n -symmetry planes theorem of a convex body // Vestnik of Tver State Technical University. Series «Building. Electrical engineering and chemical technology». 2026. № 1 (29), pp. 69–76.