УДК 629.7.052

ЗАМЕТКА ОБ *n*-СИММЕТРИИ ЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ

Ал.А. Шум[1], А.М. Ветошкин[2]
[1] Тверской государственный технический университет (г. Тверь)
[2] Мытищинский филиал Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (г. Мытищи, Московская область)

Аннотация. В предыдущих работах авторов понятие момента n-го порядка изучалось для случая размерности 3 (пространственного тела) и случая размерности 2 (плоской пластины). В данной работе это понятие рассмотрено для случая размерности 1 (линейного стержня). Установлено, что момент n-го порядка стержня относительно точки t достигает своего наименьшего значения тогда, когда эта точка t является центром (n–1)-симметрии этого стержня.

Ключевые слова: симметрия, n-симметрия, центр симметрии, момент инерции, момент n-го порядка, линейный стержень, функция плотности, масса, центр масс, электрическая машина, метод, объемная деталь, плоская деталь, теорема, лемма, пластина, размерность.

DOI: 10.46573/2658-7459-2024-2-63-71

ВВЕДЕНИЕ

Имеется длинный список работ [14–31], в которых изучены вопросы симметрии в распределении массы внутри пространственных тел или внутри плоских пластин. Исследования такого рода могут помочь при выборе технологий и методов обработки деталей машин. О многообразии современных методов и технологий механической и физико-технической обработки деталей машин дают представление труды [1–13]. Выбор из этого многообразия тех конкретных методов и технологий, которые должны быть оптимальны, особенно важен при изготовлении и балансировке вращающихся деталей электрических машин.

Источники [21–24, 28, 29, 31] посвящены изучению симметрии объемных деталей. В этих работах рассматриваются вопросы симметрии для случая размерности 3. В центре внимания работ [14–20, 25–27, 30] находится симметрия плоских деталей, следовательно, проанализированы вопросы симметрии для случая размерности 2. В настоящей статье изучается симметрия линейных деталей, то есть решаются вопросы симметрии для случая размерности 1. В этом простом случае удается доказать значимую теорему, которая не вполне ожидаемым образом связывает между собой понятие момента n-го порядка и понятие центра n-симметрии.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБОСНОВАНИЯ

Предметом изучения является линейный стержень.

Линейным стержнем называется отрезок вместе с определенной на этом отрезке *функцией плотности*. Он представляет собой упрощенную модель физического стержня (который может рассматриваться как линейная деталь). Поскольку далее будут встречаться только линейные стержни, само прилагательное «линейный» в его названии может отсутствовать.

Пусть имеется линейный стержень D, представляющий собой отрезок $[a;b]$ на оси OX вместе с определенной на этом отрезке функцией плотности $f(x)$. Указанная функция считается непрерывной и неотрицательной (допускается обращение этой функции в ноль, но предполагается, что $\int_c^d f(x)dx > 0$ для любых c и d, удовлетворяющих условию $a \le c < d \le b$).

Пусть на оси OX выбрана произвольная точка $x = t$, тогда *моментом n-го порядка стержня* D *относительно точки* t называется

$$M_n(\mathrm{D}) = \int_a^b |t-x|^n f(x)dx .$$

Момент нулевого порядка стержня D не зависит от точки t и выражает собой *массу* стержня D: $M_0(\mathrm{D}) = \int_a^b |t-x|^0 f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = m(D)$.

Момент первого порядка стержня D относительно точки t представляет собой *статический момент* стержня D относительно точки t: $M_1(\mathrm{D}) = \int_a^b |t-x| f(x)dx$.

Момент второго порядка стержня D относительно точки t представляет собой *момент инерции* стержня D относительно точки t: $M_2(\mathrm{D}) = \int_a^b (t-x)^2 f(x)dx$.

Если $t \in [a;b]$, то точка t делит отрезок $[a;b]$ на два отрезка ($[a;t]$ и $[t;b]$) и в соответствии с этим точка t делит стержень D на два стержня – D_1 и D_2 (функцией плотности для каждого из них является та же функция $f(x)$, область определения которой ограничена соответствующим отрезком). Точка t стержня D называется *центром n-симметрии* стержня D, если $M_n(\mathrm{D}_1) = M_n(\mathrm{D}_2)$.

Центр 0-симметрии стержня D представляет собой точку, которая делит этот стержень на два с равными массами, и, таким образом, центр 0-симметрии представляет собой *центр полумасс* (в соответствии с терминологией, принятой в источниках [16] и [23]). Центр 1-симметрии стержня D – это точка, которая делит этот стержень на два с равными статическими моментами, и, таким образом, центр 1-симметрии выступает *центром масс* стержня D.

Рассмотрим вспомогательную лемму.

Лемма. *Если* $n > 0$, *то:*

а) $\left(\int_a^t (t-x)^n f(x)dx\right)' = n\int_a^t (t-x)^{n-1} f(x)dx$;

б) $$\left(\int_b^t (x-t)^n f(x)dx\right)' = -n\int_b^t (t-x)^{n-1} f(x)dx .$$

Доказательство леммы

Если $\lambda(u(t), v(t)) = \int_a^{u(t)} \varphi(x, v(t))dx$, то дифференцирование по переменной t сложной функции $\lambda(t)$ будет выглядеть так:

$$\lambda'(t) = \frac{\partial\lambda}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial\lambda}{\partial v}v'(t) = \varphi(u(t), v(t))u'(t) + \int_a^{u(t)} \varphi_v'(x, v(t))dx \cdot v'(t) .$$

Подставив в это соотношение $u(t) = t$ и $v(t) = t$, получим

$$\left(\int_a^t \varphi(x,t)dx\right)' = \varphi(t,t) + \int_a^t \varphi_t'(x,t)dx .$$

Теперь, приняв $\varphi(x,t) = (t-x)^n f(x)$, получаем утверждение *а* леммы:

$$\left(\int_a^t (t-x)^n f(x)dx\right)' = (t-t)^n f(t) + \int_a^t n(t-x)^{n-1} f(x)dx = n\int_a^t (t-x)^{n-1} f(x)dx ,$$

а приняв $\varphi(x,t) = (x-t)^n f(x)$, – утверждение *б* леммы:

$$\left(\int_a^t (x-t)^n f(x)dx\right)' = (t-t)^n f(t) - \int_a^t n(x-t)^{n-1} f(x)dx = -n\int_a^t (x-t)^{n-1} f(x)dx .$$

Как известно [16, 23], для плоской пластины и пространственного тела центр *n*-симметрии может и не существовать. Как показывает теорема, данная ниже, в случае с линейным стержнем все проще и удобнее.

Теорема 1. *Центр n-симметрии стержня* D *существует и единственен для всякого* $n \geq 0$.

Доказательство теоремы 1

Пусть имеется стержень D с отрезком $[a;b]$ и функцией плотности $f(x)$ и пусть точка $t \in [a;b]$ делит стержень D на два (D_1 и D_2). Рассмотрим функцию $\gamma(t)$, определенную на отрезке $[a;b]$ следующим образом:

$$\gamma(t) = \int_a^t (t-x)^n f(x)dx - \int_t^b (x-t)^n f(x)dx .$$

Ее значения на концах отрезка $[a;b]$ имеют разные знаки:

$$\gamma(a)=\int_a^a(a-x)^n f(x)dx-\int_a^b(x-a)^n f(x)dx=-\int_a^b(x-a)^n f(x)dx<0;$$

$$\gamma(b)=\int_a^b(b-x)^n f(x)dx-\int_b^b(x-b)^n f(x)dx=\int_a^b(b-x)^n f(x)dx>0.$$

В то же время эта функция монотонно возрастает на отрезке $[a;b]$. Для $n>0$ это следует из того, что ее производная (которую легко вычислить при помощи рассмотренной леммы) положительна:

$$\gamma'(t)=n\int_a^t(t-x)^{n-1} f(x)dx+n\int_t^b(x-t)^{n-1} f(x)dx>0.$$

При $n = 0$ производная $\gamma'(t)$ находится следующим образом:

$$\gamma'(t)=\left(\int_a^t f(x)dx+\int_b^t f(x)dx\right)'=f(t)+f(t)=2f(t).$$

Поскольку функция $f(t)$ неотрицательна на отрезке $[a;b]$ и притом $\int_c^d f(x)dx>0$ для любых c и d, удовлетворяющих условию $a\le c<d\le b$, то этими же свойствами обладает и производная $\gamma'(t)$. Поэтому (так же, как и при $n>0$) функция $\gamma(t)$ строго возрастает.

Итак, функция $\gamma(t)$ строго возрастает и имеет на концах отрезка $[a;b]$ разные знаки. Следовательно, существует единственная точка $t\in[a;b]$, для которой $\gamma(t)=0$, то есть

$$\int_a^t(t-x)^n f(x)dx=\int_t^b(x-t)^n f(x)dx.$$

Поскольку это равенство означает $M_n(\mathrm{D}_1)=M_n(\mathrm{D}_2)$, то есть именно то, что точка t является центром n-симметрии стержня D, то теорема доказана.

Пусть зафиксирован стержень D с отрезком $[a;b]$ и функцией плотности $f(x)$. Тогда момент n-го порядка $M_n(\mathrm{D})$ стержня D относительно точки t является функцией, зависящей от точки t: $M_n(\mathrm{D})=M_n(t)$. Естественно, возникает вопрос о том, при каком значении t эта функция достигает своего наименьшего значения. Ответ на него дает теорема 2.

Теорема 2. *Функция $M_n(t)$ при $n\ge 1$ достигает своего наименьшего значения в той точке, которая является центром* (n–1)*-симметрии стержня* D.

Доказательство теоремы 2

Функция $M_n(t)$ определена на всей числовой оси, но ее значения для аргумента t, лежащего за пределами отрезка $[a;b]$, всегда больше, чем ее значение для любого $t \in [a;b]$. Поэтому наименьшее значение этой функции может достигаться только при $t \in [a;b]$. Пусть $t \in [a;b]$. Тогда точка t делит стержень D на два (D_1 и D_2) и функция $M_n(t)$ имеет вид $M_n(t) = \int\limits_a^b |t-x|^n f(x)dx = \int\limits_a^t (t-x)^n f(x)dx + \int\limits_t^b (x-t)^n f(x)dx$.

В силу рассмотренной леммы производная функции $M_n(t)$ может быть вычислена следующим образом:

$$M_n{}'(t) = \left(\int\limits_a^t (t-x)^n f(x)dx - \int\limits_b^t (x-t)^n f(x)dx \right)' =$$

$$= n\int\limits_a^t (t-x)^{n-1} f(x)dx + n\int\limits_b^t (x-t)^{n-1} f(x)dx =$$

$$= n\int\limits_a^t (t-x)^{n-1} f(x)dx - n\int\limits_t^b (x-t)^{n-1} f(x)dx .$$

Значения этой производной на концах отрезка $[a;b]$ имеют разные знаки:

$$M_n{}'(a) = n\int\limits_a^a (a-x)^{n-1} f(x)dx - n\int\limits_a^b (x-a)^{n-1} f(x)dx = -n\int\limits_a^b (x-a)^{n-1} f(x)dx < 0;$$

$$M_n{}'(b) = n\int\limits_a^b (b-x)^{n-1} f(x)dx - n\int\limits_b^b (x-b)^{n-1} f(x)dx = n\int\limits_a^b (b-x)^{n-1} f(x)dx > 0.$$

Вторая производная функции $M_n(t)$ может быть вычислена при помощи той же леммы (при условии, что порядок *n* больше единицы) так:

$$M_n{}''(t) = \left(n\int\limits_a^t (t-x)^{n-1} f(x)dx + n\int\limits_b^t (x-t)^{n-1} f(x)dx \right)' =$$

$$= n(n-1)\int\limits_a^t (t-x)^{n-2} f(x)dx - n(n-1)\int\limits_b^t (x-t)^{n-2} f(x)dx =$$

$$= n(n-1)\int\limits_a^t (t-x)^{n-2} f(x)dx + n(n-1)\int\limits_t^b (x-t)^{n-2} f(x)dx .$$

В полученном выражении оба слагаемых положительны при любом $t \in [a;b]$ и всяком $n > 1$, а следовательно, $M_n{}''(t) > 0$ на отрезке $[a;b]$. Это значит, что производная $M_n{}'(t)$ строго возрастает и обращается в ноль в единственной точке отрезка $[a;b]$. В этой точке достигается минимум функции $M_n(t)$, а значит, и ее наименьшее значение. Приравняв к нулю полученное ранее выражение для производной $M_n'(t)$, получаем

$$\int_a^t (t-x)^{n-1} f(x)dx = \int_t^b (x-t)^{n-1} f(x)dx,$$

но это равенство и означает, что моменты $M_{n-1}(\mathrm{D}_1)$ и $M_{n-1}(\mathrm{D}_2)$ относительно точки t равны, то есть точка t представляет собой центр (n–1)-симметрии стержня D.

За пределы приведенного рассуждения выпадает случай $n = 1$, но и для него утверждение теоремы справедливо. Поскольку $M_1'(t) = \int_a^t f(x)dx - \int_t^b f(x)dx$, то

$$M_1''(t) = \left(\int_a^t f(x)dx + \int_b^t f(x)dx \right)' = f(t) + f(t) = 2f(t).$$

Функция $f(t)$ неотрицательна на отрезке $[a;b]$ и притом $\int_c^d f(x)dx > 0$ для любых c и d, удовлетворяющих условию $a \le c < d \le b$. Очевидно, этими же свойствами должна обладать и вторая производная – $M_1''(t)$. Отсюда следует, что первая производная ($M_1'(t)$) строго возрастает и обращается в ноль в единственной точке, а именно в той, для которой $\int_a^t f(x)dx = \int_t^b f(x)dx$. Эта точка является центром 0-симметрии стержня D, то есть его центром полумасс. В ней и достигается наименьшее значение момента первого порядка $M_1(t)$. Отметим, что наименьшее значение момента второго порядка $M_2(t)$, то есть момента инерции, достигается в центре 1-симметрии стержня D (в его центре масс).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Понятие *n*-симметрии рассмотрено для линейного случая, который является более простым, чем случай плоскости или пространства. Для этого простого случая сформулированы две содержательные теоремы, причем теорема 2 устанавливает несколько неожиданный критерий достижения моментом *n*-го порядка $M_n(\mathrm{D})$ своего минимума. Можно предположить, что эта теорема, относящаяся к случаю размерности 1, в том или ином виде может быть перенесена на более сложные случаи размерности (2 и 3), которым посвящены работы [14–31].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артамонов Б.А., Волков Ю.С., Дрожжалова В.И., Седыхин Ф.В., Смоленцев В.П., Ямпольский В.М. Электрофизические и электрохимические методы обработки материалов: учебное пособие: в 2 т. М.: Высшая школа, 1983. Т. 1. 247 с.
2. Верещака А.С. Работоспособность режущего инструмента с износостойкими покрытиями. М.: Машиностроение, 1993. 336 с.

3. Вороничев Н.М., Тартаковский Ж.Э., Генин В.Б. Автоматические линии из агрегатных станков. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1979. 487 с.
4. Дальский А.М., Гаврилюк В.С. Механическая обработка материалов: учебник для вузов. М.: Машиностроение, 1981. 266 с.
5. Немилов Е.Ф. Электроэрозионная обработка материалов: учебное пособие. Л.: Машиностроение, 1983. 160 с.
6. Подураев В.Н. Автоматически регулируемые и комбинированные процессы резания. М.: Машиностроение, 1977. 303 с.
7. Силин С.С. Метод подобия при резании материалов. М.: Машиностроение, 1979. 152 с.
8. Старков В.К. Обработка резанием. Управление стабильностью и качеством в автоматизированном производстве. М.: Машиностроение, 1989. 297 с.
9. Трент Е.М. Резание металлов. М.: Машиностроение, 1980. 263 с.
10. Участки для электроэрозионной обработки рабочих деталей вырубных штампов и пресс-форм: методические рекомендации по проектированию. М.: ОНТИ ЭНИМС, 1983. 47 с.
11. Этин А.О. Кинематический анализ и выбор эффективных методов обработки лезвийным инструментом. М.: Машгиз, 1953. 173 с.
12. Янюшкин А.С., Шоркин В.С. Контактные процессы при электроалмазном шлифовании. М.: Машиностроение-1, 2004. 230 с.
13. Ящерицын П.И., Фельдштейн Е.Э., Корниевич М.А. Теория резания. Минск: Новое знание, 2006. 512 с.
14. Шум Ал.А. О симметрии функций, определенных в круге // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2014. Вып. 25. С. 3–8.
15. Шум Ал.А. Замечание об *s*-симметричных функциях // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2015. Вып. 27. С. 3–6.
16. Шум Ал.А. О центрах симметрии функции двух переменных // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2016. Вып. 30. С. 19–23.
17. Шум Ал.А. О центрах симметрии функции, определенной в выпуклой области плоскости // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2017. Вып. 31. С. 19–22.
18. Шум Ал.А. Симметрическая линия функции двух переменных // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2017. Вып. 32. С. 103–105.
19. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Симметрическая линия правильного однородного треугольника // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2018. Вып. 34. С. 47–53.
20. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Параметрические уравнения симметрической линии правильного однородного треугольника // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2018. Вып. 34. С. 44–47.
21. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Замечание о симметрии функций, определенных в шаре // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Технические науки»*. 2019. № 3 (3). С. 38–46.
22. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Об одном критерии *s*-симметрии функции трех переменных // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Технические науки»*. 2019. № 4 (4). С. 30–35.
23. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. О центрах симметрии функции трех переменных // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2020. № 1 (5). С. 71–78.

24. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. О центрах симметрии функции, определенной в выпуклой области пространства // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2020. № 2 (6). С. 57–65.
25. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Замечание о центрах *s*-симметрии и *c*-симметрии плоской пластины // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2021. № 1 (9). С. 63–70.
26. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Моменты плоской пластины относительно прямой и некоторые вопросы симметрии // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2021. № 2 (10). С. 78–84.
27. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. О центрах симметрии плоской выпуклой пластины // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2021. № 3 (11). С. 65–72.
28. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. О понятии *n*-симметрии пространственного тела // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2022. № 3 (15). С. 66–72.
29. Шум Ал.А., Ветошкин А.М. О центрах симметрии выпуклого пространственного тела // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2023. № 2 (18). С. 64–72.
30. Шум Ал.А., Ветошкин А.М. Теорема о центре *n*-симметрии плоской выпуклой пластины // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2023. № 3 (19). С. 75–82.
31. Шум Ал.А., Ветошкин А.М. Теорема о центре *n*-симметрии выпуклого пространственного тела // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2023. № 4 (20). С. 76–82.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ШУМ Александр Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет», 170026, Россия, г. Тверь, наб. А. Никитина, д. 22. E-mail: shum@tstu.tver.ru

ВЕТОШКИН Александр Михайлович – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики, информатики и вычислительной техники, Мытищинский филиал Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, 141005, Россия, Московская область, г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, 1. E-mail: vetkin@mgul.ac.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Шум Ал.А., Ветошкин А.М. Заметка об *n*-симметрии линейного стержня // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии». 2024. № 2 (22). С. 63–71.

A NOTE ON THE *n*-SYMMETRY OF A LINEAR ROD

Al.A. Shum[1], A.M. Vetoshkin[2]
[1] Tver State Technical University (Tver)
[2] Mytishchi filial of MSTU named after N.E. Bauman
(Mytishchi city, Moscow region)

Abstract. In previous works of the authors, the concept of an nth-order moment was studied for the case of dimension 3 (a spatial body) and the case of dimension 2 (a flat plate). In this paper, this concept is considered for the case of dimension 1 (linear rod). It is established that the moment of the nth order of the rod relative to a point reaches its lowest value when this point is the center of the (n–1)symmetry of this rod.

Keywords: symmetry, *n*-symmetry, center of symmetry, moment of inertia, moment of *n*-th order, linear rod, density function, mass, center of mass, electric machine, method, volumetric detail, flat detail, theorem, lemma, plate, dimension.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

SHUM Alexander Anatolievich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Tver State Technical University, 22, embankment of A. Nikitin, Tver, 170026, Russia. E-mail: shum@tstu.tver.ru
VETOSHKIN Alexander Mikhailovich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Informatics and Computer Engineering, MF Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, 1, 1st Institutskaya street, Mytishchi city, Moscow region, 141005, Russia. E-mail: vetkin@mgul.ac.ru

CITATION FOR AN ARTICLE

Shum Al.A., Vetoshkin A.M. A note on the n-symmetry of a linear rod // Vestnik of Tver State Technical University. Series «Building. Electrical engineering and chemical technology». 2024. № 2 (22), pp. 63–71.