Keywords: thermal radiation, gas volume, laws, torch, electric arc, furnaces, furnaces, combustion chambers.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

MAKAROV Anatoly Nikolaevich – Doctor of Engineering Sciences, Professor, Head of the Department of Power Supply and Electrical Engineering, Tver State Technical University, 22, embankment of A. Nikitin, Tver, 170026, Russia. E-mail: tgtu_kafedra_ese@mail.ru

CITATION FOR AN ARTICLE

Makarov A.N. Checking the laws of thermal radiation of gas volumes for the correspondence to the truth. Part II. Examples of calculations according to the laws of thermal radiation of cylindrical and spherical gas volumes // Vestnik of Tver State Technical University. Series «Building. Electrical engineering and chemical technology». 2023. No. 4 (20), pp. 66–76.

УДК 629.7.052

ТЕОРЕМА О ЦЕНТРЕ *n*-СИММЕТРИИ ВЫПУКЛОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ТЕЛА

Ал.А. Шум[1], А.М. Ветошкин[2]

[1] *Тверской государственный технический университет (г. Тверь, Тверская область)*
[2] *Мытищинский филиал Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (г. Мытищи, Московская область)*

Аннотация. Рассмотрено понятие центра n-симметрии пространственного тела. Указано, что частными случаями этого общего понятия являются центр s-симметрии (центр 0-симметрии) и центр c-симметрии (центр 1-симметрии). Доказана следующая теорема: в любой выпуклой области пространства можно определить функцию плотности так, что центр n-симметрии полученного тела будет находиться в любой наперед заданной внутренней точке этого тела (ранее были известны частные случаи этой теоремы, соответствующие значениям $n = 0$ и $n = 1$).

Ключевые слова: симметрия, c-симметрия, s-симметрия, n-симметрия, центр симметрии, функция плотности, выпуклое тело, масса, центр масс, электрическая машина.

DOI: 10.46573/2658-7459-2023-4-76-82

ВВЕДЕНИЕ

Существует большое количество методов и технологий механической и физико-технической обработки деталей машин (эти методы и технологии представлены в работах [1–13]). Чтобы правильно выбрать те или иные конкретные методы и технологии, в каждом отдельном случае приходится учитывать характер распределения массы внутри обрабатываемой детали. Такое распределение особенно важно принимать во внимание в процессе изготовления и балансировки вращающихся деталей электрической машины, поскольку качество исполнения обозначенных деталей может непосредственно влиять на длительность безаварийной работы машины в целом.

Распределение массы внутри детали описывает соответствующая функция плотности. Плоская деталь (или в соответствии с определением из [16] *пластина*) может быть представлена как область плоскости вместе с определенной в этой области функцией плотности, зависящей от двух переменных, объемная (или, согласно определению из [28], *тело*) – как область пространства вместе с определенной в этой области функцией плотности, зависящей от трех переменных. Представляет некоторый интерес изучение тех или иных видов симметрии как плоских, так и объемных деталей. В работах [14–20, 25–27, 30] рассматривались вопросы симметрии плоских пластин, а в статьях [21–24, 28, 29] предметом изучения были вопросы симметрии пространственных тел.

В настоящей статье продолжается исследование симметрии пространственных тел. В статьях [21–24] рассматривались два вида симметрии указанных тел: *s*-симметрия и *c*-симметрия. В работе [28] было предложено общее определение *n*-симметрии пространственного тела, в рамках которого *s*-симметрия оказывается 0-симметрией (то есть частным случаем *n*-симметрии при значении $n = 0$), а *c*–симметрия – 1-симметрией. В статье [24] для каждого из этих двух видов симметрии был установлен следующий факт: в любой выпуклой области пространства можно определить функцию плотности так, что центр соответствующей симметрии полученного пространственного тела будет находиться в любой наперед заданной внутренней точке этого тела. Теорема 1 из [24] устанавливает это для *s*-симметрии, а теорема 2 – для *c*-симметрии. В работе [29] был найден достаточный критерий совпадения центра *n*-симметрии выпуклого пространственного тела с началом координат, справедливый при любом значении *n*. В настоящей статье при помощи этого критерия переносятся утверждения теорем 1 и 2 из [24] на общий случай *n*-симметрии. Следует также отметить, что данный результат представляет собой в то же время перенос на случай функции трех переменных аналогичного результата, полученного в работе [30] для случая функции двух переменных.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБОСНОВАНИЯ

Под *областью* понимается область трехмерного евклидова пространства, ограниченная некоторой поверхностью. Поверхность, ограничивающая область, называется *границей* этой области и также считается ее частью (таким образом, область является замкнутой). Точки области, не лежащие на ее границе, называются *внутренними* точками этой области. Область является *выпуклой*, если всякая прямая, проведенная через любую внутреннюю точку этой области, пересекает ее границу ровно в двух точках. Область V_1 называется *подобластью* области V, если $V_1 \subseteq V$. Область V вместе с определенной в этой области непрерывной неотрицательной функцией (*функцией плотности*) называется *телом* D, подобласть области V вместе с необходимым ограничением функции плотности – *подтелом* тела D.

Функцию плотности тела D удобно записывать в виде $f(\rho,\varphi,\theta)$, считая заданной подходящую сферическую систему координат (следует отметить, что при переходе от одной системы координат к другой выражение функции $f(\rho,\varphi,\theta)$ через координаты меняется, но при этом сама функция как функция точки остается неизменной).

Пусть в пространстве имеются плоскость П и тело D с областью V и функцией плотности $f(\rho,\varphi,\theta)$. Тогда *момент n-го порядка тела* D *относительно плоскости* П определяется следующим образом:

$$M_n(\mathrm{D}) = \iiint\limits_V \left(R(\rho,\varphi,\theta)\right)^n f(\rho,\varphi,\theta)\rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta ,$$

где $R(\rho,\varphi,\theta)$ – расстояние от точки (ρ,φ,θ) до плоскости П.

Следует иметь в виду, что значение момента $M_n(\mathrm{D})$ не зависит от выбора системы координат, поскольку функции $f(\rho,\varphi,\theta)$ и $R(\rho,\varphi,\theta)$ при заданной плоскости П представляют собой функции точки тела D.

Момент нулевого порядка тела D не зависит от положения плоскости П и выражает собой *массу* тела D:

$$M_0(\mathrm{D}) = \iiint\limits_V \left(R(\rho,\varphi,\theta)\right)^0 f(\rho,\varphi,\theta)\rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta = \iiint\limits_V f(\rho,\varphi,\theta)\rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta = m(\mathrm{D}) .$$

Момент первого порядка тела D относительно плоскости П представляет собой *статический момент* тела D относительно плоскости П:

$$M_1(\mathrm{D}) = \iiint\limits_V R(\rho,\varphi,\theta) f(\rho,\varphi,\theta)\rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta .$$

В соответствии с определением из статьи [28] плоскость является *плоскостью n-симметрии* тела D, если она делит тело D на два подтела – D_1 и D_2 – таким образом, что $M_n(\mathrm{D}_1) = M_n(\mathrm{D}_2)$. Точка представляет собой *центр n-симметрии* тела D, если всякая проведенная через нее плоскость является плоскостью *n*-симметрии тела D.

Вообще говоря, центра у *n*-симметрии тела D может не существовать. Так, в статье [23] рассмотрен пример тела, которое не имеет *центра полумасс*, то есть 0-симметрии (при этом центр 1-симметрии, то есть *центр масс*, всегда существует).

Предполагается, что переменные функции плотности $f(\rho,\varphi,\theta)$ ρ, φ и θ могут меняться в следующих пределах: $0 \le \rho < +\infty$, $-\infty < \varphi < +\infty$, $0 \le \theta \le \pi$. Предполагается также, что эта функция *имеет период 2π по переменной* φ, то есть $f(\rho,\varphi,\theta) = f(\rho,\varphi+2\pi,\theta)$ при любых значениях *ρ, φ* и *θ*, принадлежащих соответствующей области определения.

Функция углов сферической системы координат $F(\varphi,\theta)$ является *центро-симметричной*, если $F(\varphi,\theta) = F(\varphi+\pi,\pi-\theta)$ при любых значениях *φ* и любом $\theta \in [0;\pi]$. В силу этого определения при любых значениях *φ* и любом $\theta \in [0;\pi]$

$$F(\varphi,\theta) = F(\varphi+\pi,\pi-\theta) = F\big((\varphi+\pi)+\pi,\pi-(\pi-\theta)\big) = F(\varphi+2\pi,\theta),$$

а это значит, что центро-симметричная функция имеет период 2π по переменной *φ*.

В работе [29] доказана лемма, расположенная ниже и устанавливающая достаточный критерий совпадения центра *n*-симметрии выпуклого пространственного тела с началом координат.

Лемма. *Пусть начало сферической системы координат является внутренней точкой некоторой выпуклой области V тела D с функцией плотности* $f(\rho,\varphi,\theta)$; $r(\varphi,\theta)$ – *расстояние от данного начала координат до границы области вдоль луча, определяемого* *углами φ и θ, и функция этих углов $F_n(\varphi,\theta)=\int\limits_0^{r(\varphi,\theta)} f(\rho,\varphi,\theta)\rho^{n+2}d\rho$ центро-симметрична. Тогда тело D имеет центр n-симметрии в начале координат.*

При помощи данного критерия может быть доказана следующая теорема, выступающая главным результатом настоящей работы.

Теорема. *Для любой внутренней точки выпуклой области V можно так определить в области V функцию плотности $f(\rho,\varphi,\theta)$, что полученное тело D будет иметь центр n-симметрии именно в этой точке.*

Доказательство. Выберем начало координат сферической системы в той внутренней точке области V, в которой должен находиться центр n-симметрии тела D. Пусть $r(\varphi,\theta)$ – расстояние от выбранного начала координат до границы области V вдоль луча, определяемого углами φ и θ. Определим функцию плотности тела D следующим образом:

$$f(\rho,\varphi,\theta)=\frac{\rho}{\left[r(\varphi,\theta)\right]^{n+4}}.$$

Тогда функция $F_n(\varphi,\theta)$ по условию рассмотренной леммы может быть вычислена так:

$$F_n(\varphi,\theta)=\int\limits_0^{r(\varphi,\theta)} f(\rho,\varphi,\theta)\rho^{n+2}d\rho=\int\limits_0^{r(\varphi,\theta)}\frac{\rho}{\left[r(\varphi,\theta)\right]^{n+4}}\rho^{n+2}d\rho=$$

$$=\frac{1}{\left[r(\varphi,\theta)\right]^{n+4}}\int\limits_0^{r(\varphi,\theta)}\rho^{n+3}d\rho=\frac{1}{\left[r(\varphi,\theta)\right]^{n+4}}\left[\left.\frac{\rho^{n+4}}{(n+4)}\right|_0^{r(\varphi,\theta)}\right]=$$

$$=\frac{1}{\left[r(\varphi,\theta)\right]^{n+4}}\cdot\frac{\left[r(\varphi,\theta)\right]^{n+4}}{n+4}=\frac{1}{n+4}.$$

Таким образом, функция $F_n(\varphi,\theta)$ оказалась постоянной (не зависящей от углов φ и θ), а потому она является и центро-симметричной. Следовательно, в силу рассмотренной леммы центр n-симметрии тела D будет находиться в начале координат, то есть в нужной точке.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В доказанной теореме установленные ранее теоремы 1 и 2 из работы [24] о центрах c-симметрии и s-симметрии распространены на общий случай центров n-симметрии. Доказательство этой общей теоремы получилось относительно простым благодаря удобному достаточному критерию совпадения центра n-симметрии выпуклого тела с началом координат, представленному в работе [27]. Этот критерий, в свою очередь, представляет собой обобщение на случай n-симметрии критерия, установленного в статье [24] для случая s-симметрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артамонов Б.А., Волков Ю.С., Дрожжалова В.И., Седыхин Ф.В., Смоленцев В.П., Ямпольский В.М. Электрофизические и электрохимические методы обработки материалов: учебное пособие: в 2 т. М.: Высшая школа. 1983. Т. 1. 247 с. Т. 2. 208 с.
2. Верещака А.С. Работоспособность режущего инструмента с износостойкими покрытиями. М.: Машиностроение. 1993. 336 с.
3. Вороничев Н.М., Тартаковский Ж.Э., Генин В.Б. Автоматические линии из агрегатных станков. М.: Машиностроение. 1979. 487 с.
4. Дальский А.М., Гаврилюк В.С. Механическая обработка материалов: учебник для вузов. М.: Машиностроение. 1981. 266 с.
5. Немилов Е.Ф. Электроэрозионная обработка материалов. Л.: Машиностроение. 1983. 160 с.
6. Подураев В.Н. Автоматически регулируемые и комбинированные процессы резания. М.: Машиностроение. 1977. 303 с.
7. Силин С.С. Метод подобия при резании материалов. М.: Машиностроение. 1979. 152 с.
8. Старков В.К. Обработка резанием. Управление стабильностью и качеством в автоматизированном производстве. М.: Машиностроение. 1989. 297 с.
9. Трент Е.М. Резание металлов. М.: Машиностроение. 1980. 263 с.
10. Участки для электроэрозионной обработки рабочих деталей вырубных штампов и пресс-форм: методические рекомендации по проектированию. М.: ОНТИ ЭНИМС. 1983. 47 с.
11. Этин А.О., Юхвид М.Е. Кинематический анализ и выбор эффективных методов обработки лезвийным инструментом / под ред. М.А. Эстерзона. М.:[б. и.]. 1994. 185 с.
12. Янюшкин А.С., Шоркин В.С. Контактные процессы при электроалмазном шлифовании. М.: Машиностроение-1. 2004. 230 с.
13. Ящерицын П.И., Фельдштейн Е.Э., Корниевич М.А. Теория резания. Минск: Новое знание. 2006. 512 с.
14. Шум Ал.А. О симметрии функций, определенных в круге // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2014. Вып. 25. С. 3–8.
15. Шум Ал.А. Замечание об *s*-симметричных функциях // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2015. Вып. 27. С. 3–6.
16. Шум Ал.А. О центрах симметрии функции двух переменных // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2016. Вып. 30. С. 19–23.
17. Шум Ал.А. О центрах симметрии функции, определенной в выпуклой области плоскости // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2017. Вып. 31. С. 19–22.
18. Шум Ал.А. Симметрическая линия функции двух переменных // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2017. Вып. 32. С. 103–105.
19. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Симметрическая линия правильного однородного треугольника // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2018. Вып. 34. С. 47–53.
20. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Параметрические уравнения симметрической линии правильного однородного треугольника // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2018. Вып. 34. С. 44–47.
21. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Замечание о симметрии функций, определенных в шаре // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Технические науки»*. 2019. № 3 (3). С. 38–46.

22. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Об одном критерии *s*-симметрии функции трех переменных // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Технические науки»*. 2019. № 4 (4). С. 30–35.
23. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. О центрах симметрии функции трех переменных // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2020. № 1 (5). С. 71–78.
24. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. О центрах симметрии функции, определенной в выпуклой области пространства // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2020. № 2 (6). С. 57–65.
25. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Замечание о центрах *s*-симметрии и *c*-симметрии плоской пластины // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2021. № 1 (9). С. 63–70.
26. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Моменты плоской пластины относительно прямой и некоторые вопросы симметрии // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2021. № 2 (10). С. 78–84.
27. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. О центрах симметрии плоской выпуклой пластины // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2021. № 3 (11). С. 65–72.
28. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. О понятии *n*-симметрии пространственного тела // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии».* 2022. № 3 (15). С. 66–72.
29. Шум Ал.А., Ветошкин А.М. О центрах симметрии выпуклого пространственного тела // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии».* 2023. № 2 (18). С. 64–72.
30. Шум Ал.А., Ветошкин А.М. Теорема о центре *n*-симметрии плоской выпуклой пластины *// Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии».* 2023. № 3 (19). С. 75–82.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ШУМ Александр Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет», 170026, Россия, г. Тверь, наб. А. Никитина, д. 22. E-mail: shum@tstu.tver.ru
ВЕТОШКИН Александр Михайлович – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики, информатики и вычислительной техники, Мытищинский филиал ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университета им. Н.Э. Баумана», 141005, Россия, г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1. E-mail: vetkin@mgul.ac.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Шум Ал.А., Ветошкин А.М. Теорема о центре n-симметрии выпуклого пространственного тела // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии». 2023. № 4 (20). С. 76–82.

THEOREM ON THE CENTER OF *n*-SYMMETRY OF A CONVEX SPATIAL BODY

***Al.A. Shum*[1], *A.M. Vetoshkin*[2]**
[1] *Tver State Technical University (Tver)*
[2] *Mytishchi branch of Moscow State Technical University named after N.Uh. Bauman (Mytishchi, Moscow region)*

Abstract. The concept of the center of *n*-symmetry of a spatial body is considered. It is indicated that special cases of this general concept are the center of *s*-symmetry (the center of 0-symmetry) and the center of *c*-symmetry (the center of 1-symmetry). The following theorem is proved: in any convex region of space, it is possible to determine the density function so that the center of the *n*-symmetry of the resulting body will be located at any predetermined internal point of this body (special cases of this theorem corresponding to the values $n = 0$ and $n = 1$ were previously known).

Keywords: symmetry, *c*-symmetry, *s*-symmetry, *n*-symmetry, center of symmetry, density function, convex body, mass, center of mass, electric bus.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

SHUM Alexander Anatolievich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Tver State Technical University, 22, embankment of A. Nikitin, Tver, 170026, Russia. E-mail: shum@tstu.tver.ru
VETOSHKIN Alexander Mikhailovich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Informatics and Computer Engineering of Mytishchi branch, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, 1, 1st Institutskaya str., Mytishchi, 141005, Russia. E-mail: vetkin@mgul.ac.ru

CITATION FOR AN ARTICLE

Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. Theorem on the center of n-symmetry of a convex spatial body // Vestnik of Tver State Technical University. Series «Building. Electrical engineering and chemical technology». 2023. No. 4 (20), pp. 76–82.