УДК 629.7.052

О ЦЕНТРАХ СИММЕТРИИ ВЫПУКЛОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ТЕЛА

Ал.А. Шум[1], А.М. Ветошкин[2]
[1]Тверской государственный технический университет (г. Тверь, Тверская область)
[2]Мытищинский филиал Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (г. Мытищи, Московская область)

© Шум Ал.А., Ветошкин А.М., 2023

Аннотация. Рассмотрено введенное авторами ранее понятие центра *n*-симметрии пространственного тела. Указано, что частными случаями этого общего понятия являются центр *s*-симметрии (центр 0-симметрии) и центр *c*-симметрии (центр 1-симметрии). Установленный ранее критерий совпадения центра *s*-симметрии выпуклого пространственного тела с началом координат перенесен на общий случай *n*-симметрии.

Ключевые слова: симметрия, *c*-симметрия, *s*-симметрия, *n*-симметрия, центр симметрии, функция плотности, выпуклое тело, масса, центр масс, электрическая машина.

DOI: 10.46573/2658-7459-2023-2-64-72

ВВЕДЕНИЕ

Многообразие методов и технологий механической и физико-технической обработки деталей машин представлено в работах [1–13]. Выбор из этого многообразия тех или иных конкретных методов или технологий в каждом отдельном случае может зависеть от характера распределения массы внутри обрабатываемой детали. Так, например, такое распределение важно учитывать при изготовлении и балансировке вращающихся деталей электрических машин, качество исполнения которых обусловливает длительность их безаварийной работы.

Распределение массы внутри детали описывает соответствующая функция плотности, поэтому представляется естественным изучение свойств функции плотности и прежде всего тех из них, которые связаны с каким-либо видом симметрии. В работах [14–20, 25–27] рассматривались вопросы симметрии функции плотности, зависящей от двух переменных, и в зависимости от этого изучались плоские детали (которые в рамках определений из [16] представляют собой *пластины*). В статьях [21–24, 28] разбираемая функция плотности обусловливается уже тремя переменными. Таким образом, в этих работах предметом изучения выступают объемные детали (то есть, согласно определениям из [28], *тела*).

Настоящая статья продолжает исследования симметрии пространственных тел. В работах [14–24] рассматривались два вида симметрии пространственных тел: *s*-симметрия и *c*-симметрия. В работе [28] было предложено общее определение *n*-симметрии пространственного тела, такое, что *s*-симметрия оказывается 0-симметрией (частным случаем *n*-симметрии, соответствующим значению $n = 0$), а *c*-симметрия – 1-симметрией

(частным случаем *n*-симметрии, соответствующим значению $n = 1$). В статье [24] был установлен достаточный критерий совпадения центра *s*-симметрии выпуклого пространственного тела с началом координат. В настоящей работе этот критерий переносится на общий случай *n*-симметрии (следует также отметить, что данный результат представляет собой в то же время перенос на случай функции трех переменных аналогичного результата, полученного в работе [27] для случая функции двух переменных).

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБОСНОВАНИЯ

Рассматривается трехмерное евклидово пространство. Под *областью* понимается замкнутая область этого пространства, ограниченная некоторой поверхностью (которая называется *границей* этой области и также считается ее частью). Точки области, не лежащие на ее границе, являются *внутренними* точками этой области. Область считается *выпуклой*, если всякая прямая, проведенная через любую внутреннюю точку этой области, пересекает ее границу ровно в двух точках. Область V_1 называется *подобластью* области V, если $V_1 \subseteq V$, область V вместе с определенной в этой области непрерывной неотрицательной функцией (*функцией плотности*) называется *телом* D, подобласть области V вместе с соответствующим ограничением функции плотности – *подтелом* тела D.

Функцию плотности тела D будем записывать в виде $f(\rho,\varphi,\theta)$, считая заданной подходящую сферическую систему координат (отметим, что при переходе от одной системы координат к другой выражение функции $f(\rho,\varphi,\theta)$ через координаты изменяется, хотя сама функция, как функция точки, остается неизменной).

Если в пространстве заданы плоскость П и тело D с областью V и функцией плотности $f(\rho,\varphi,\theta)$, то *моментом n-го порядка тела* D *относительно плоскости* П называется

$$M_n(\mathrm{D}) = \iiint\limits_{\mathrm{V}} \left(R(\rho,\varphi,\theta)\right)^n f(\rho,\varphi,\theta)\rho^2 \sin\theta \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta ,$$

где $R(\rho,\varphi,\theta)$ – расстояние от точки (ρ,φ,θ) до плоскости П.

Заметим, что значение момента $M_n(\mathrm{D})$ не зависит от выбора системы координат, поскольку функции $f(\rho,\varphi,\theta)$ и $R(\rho,\varphi,\theta)$ при заданной плоскости П являются функциями точки тела D.

Отдельно следует рассмотреть моменты нулевого и первого порядков. Момент нулевого порядка тела D не зависит от плоскости П и равен *массе* тела D:

$$M_0(\mathrm{D}) = \iiint\limits_{\mathrm{V}} \left(R(\rho,\varphi,\theta)\right)^0 f(\rho,\varphi,\theta)\rho^2 \sin\theta \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta = \iiint\limits_{\mathrm{V}} f(\rho,\varphi,\theta)\rho^2 \sin\theta \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta = m(\mathrm{D}) .$$

Момент первого порядка тела D относительно плоскости П представляет собой *статический момент* тела D относительно плоскости П:

$$M_1(\mathrm{D}) = \iiint\limits_{\mathrm{V}} R(\rho,\varphi,\theta) f(\rho,\varphi,\theta)\rho^2 \sin\theta \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta .$$

В соответствии с [28] плоскость является плоскостью *n*-симметрии тела D, если она делит тело D на два подтела – D_1 и D_2 – так, что $M_n(D_1) = M_n(D_2)$. Точка будет центром *n*-симметрии тела D, если всякая проведенная через нее плоскость – плоскость *n*-симметрии тела D. Вообще говоря, центр *n*-симметрии тела D существует не всегда. Согласно определениям из статьи [23], центр 0-симметрии тела D представляет собой *центр полумасс* этого тела, а центр 1-симметрии является его *центром масс*; при этом в той же статье показано, что центр масс тела D всегда существует, в то время как его центр полумасс может не существовать.

Предполагается, что переменные ρ, φ и θ функции $f(\rho,\varphi,\theta)$ могут меняться в следующих пределах: $0 \le \rho < +\infty$, $-\infty < \varphi < +\infty$, $0 \le \theta \le \pi$. Принимается также, что эта функция *имеет период* 2π *по переменной* φ. Это значит, что равенство $f(\rho,\varphi,\theta) = f(\rho,\varphi+2\pi,\theta)$ выполнено для любых значений ρ,φ и θ, принадлежащих соответствующей области определения (если изначально функция плотности найдена только для значений аргумента φ из некоторого промежутка длиной 2π, то она автоматически продолжается до периодической по переменной φ с периодом 2π).

Функцию углов сферической системы координат $F(\varphi,\theta)$ называем *центросимметричной*, если $F(\varphi,\theta) = F(\varphi+\pi,\pi-\theta)$ при каком угодно значении φ и каком угодно $\theta \in [0;\pi]$. В силу этого определения при любых значениях φ и любом $\theta \in [0;\pi]$

$$F(\varphi,\theta) = F(\varphi+\pi,\pi-\theta) = F\big((\varphi+\pi)+\pi,\pi-(\pi-\theta)\big) = F(\varphi+2\pi,\theta),$$

то есть центросимметричная функция имеет период 2π по переменной φ.

Лемма. *Пусть начало сферической системы координат является внутренней точкой некоторой выпуклой области V тела D с функцией плотности* $f(\rho,\varphi,\theta)$, $r(\varphi,\theta)$ *– расстояние от данного начала координат до границы области вдоль луча, определяемого углами* φ *и* θ, *и функция этих углов* $F_n(\varphi,\theta) = \int_0^{r(\varphi,\theta)} f(\rho,\varphi,\theta)\rho^{n+2}d\rho$ *центросимметрична. Тогда тело D имеет центр n-симметрии в начале координат.*

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы и плоскость П, проведенная через начало координат, делит тело D на два подтела – D_1 и D_2 – с областями V_1 и V_2 соответственно. Расстояние $R(\rho,\varphi,\theta)$ от точки (ρ,φ,θ) до плоскости П при заданных углах φ и θ пропорционально ρ, что очевидно. Кроме того, при каждом фиксированном ρ функция $R(\rho,\varphi,\theta)$ углов φ и θ есть функция центросимметричная (это следует из симметрии плоскости П относительно начала координат). Таким образом, $R(\rho,\varphi,\theta) = \rho \cdot k(\varphi,\theta)$, где $k(\varphi,\theta)$ – коэффициент пропорциональности, представляющий собой центросимметричную функцию углов φ и θ.

Вычисление момента *n*-го порядка тела D_1 относительно плоскости П будет выглядеть следующим образом:

$$M_n(\mathrm{D}_1)=\iiint\limits_{\mathrm{V}_1}\left(R(\rho,\varphi,\theta)\right)^n f(\rho,\varphi,\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta=$$

$$=\iiint\limits_{\mathrm{V}_1}\left(\rho\cdot k(\varphi,\theta)\right)^n f(\rho,\varphi,\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\vartheta(\varphi)}k^n(\varphi,\theta)\sin\theta\cdot d\theta\int\limits_0^{r(\varphi,\theta)}f(\rho,\varphi,\theta)\rho^{n+2}d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\vartheta(\varphi)}k^n(\varphi,\theta)\sin\theta\cdot F_n(\varphi,\theta)d\theta,$$

где $\vartheta(\varphi)$ – угол между лучом, представляющим собой пересечение полуплоскости $\varphi=const$ с плоскостью П, и вертикальной осью сферической системы координат (легко видеть, что $\vartheta(\varphi+\pi)=\pi-\vartheta(\varphi)$ при любом значении угла φ).

С другой стороны, момент *n*-го порядка тела D_2 относительно плоскости П может вычисляться так:

$$M_n(\mathrm{D}_2)=\iiint\limits_{\mathrm{V}_2}\left(R(\rho,\varphi,\theta)\right)^n f(\rho,\varphi,\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta=$$

$$=\iiint\limits_{\mathrm{V}_2}\left(\rho\cdot k(\varphi,\theta)\right)^n f(\rho,\varphi,\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{\vartheta(\varphi)}^{\pi}k^n(\varphi,\theta)\sin\theta\cdot d\theta\int\limits_0^{r(\varphi,\theta)}f(\rho,\varphi,\theta)\rho^{n+2}d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{\vartheta(\varphi)}^{\pi}k^n(\varphi,\theta)\sin\theta\cdot F_n(\varphi,\theta)d\theta=$$

$$=\left\{\begin{matrix}x=\varphi-\pi\\ \varphi=x+\pi\\ d\varphi=dx\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}y=\pi-\theta\\ \theta=\pi-y\\ d\theta=-dy\end{matrix}\right\}=$$

$$=-\int\limits_{-\pi}^{\pi}dx\int\limits_{\pi-\vartheta(x+\pi)}^{0}k^n(x+\pi,\pi-y)\sin(\pi-y)\cdot F_n(x+\pi,\pi-y)dy=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}dx\int\limits_0^{\vartheta(x)}k^n(x,y)\sin y\cdot F_n(x,y)dy=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{0}dx\int\limits_0^{\vartheta(x)}k^n(x,y)\sin y\cdot F_n(x,y)dy+\int\limits_0^{\pi}dx\int\limits_0^{\vartheta(x)}k^n(x,y)\sin y\cdot F_n(x,y)dy=$$

$$=\left\{\begin{matrix} z=x+2\pi \\ x=z-2\pi \\ dx=dz \end{matrix}\right\}=\int_{\pi}^{2\pi} dz \int_{0}^{\vartheta(z-2\pi)} k^n(z-2\pi,y)\sin y\cdot F_n(z-2\pi,y)dy+$$

$$+\int_{0}^{\pi} dx \int_{0}^{\vartheta(x)} k^n(x,y)\sin y\cdot F_n(x,y)dy=\int_{\pi}^{2\pi} dz \int_{0}^{\vartheta(z)} k^n(z,y)\sin y\cdot F_n(z,y)dy+$$

$$+\int_{0}^{\pi} dx \int_{0}^{\vartheta(x)} k^n(x,y)\sin y\cdot F_n(x,y)dy=\int_{0}^{2\pi} dx \int_{0}^{\vartheta(x)} k^n(x,y)\sin y\cdot F_n(x,y)dy\,.$$

Таким образом, выражения для моментов $M_n(\mathrm{D}_1)$ и $M_n(\mathrm{D}_2)$ отличаются только обозначениями переменных интегрирования и, следовательно, одинаковы. Это значит, что плоскость П является плоскостью *n*-симметрии тела D. Поскольку плоскость П была проведена через начало координат произвольно, то начало координат выступает центром *n*-симметрии тела D, что и требовалось доказать.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Доказанная лемма распространяет достаточный критерий, установленный в статье [24] для 0-симметрии (то есть для *s*-симметрии), на общий случай *n*-симметрии. Принятое в настоящей работе требование неотрицательности функции $f(\rho,\varphi,\theta)$ является естественным, поскольку эта функция понимается как функция плотности тела D. Между тем, установленная лемма останется справедливой и без этого ограничения. Однако в этом случае придется иметь дело с телами отрицательной плотности или же (что менее удобно, но более правильно) использовать подход, принятый в работе [24]. В этой статье понятие пространственного тела не используется: рассматриваются центры симметрии функции трех переменных, определенной в выпуклой области пространства. Следует отметить, что разница между двумя подходами непринципиальна, и все результаты могут быть сформулированы как в рамках одной, так и в рамках другой терминологии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артамонов Б.А., Волков Ю.С., Дрожжалова В.И., Седыхин Ф.В., Смоленцев В.П., Ямпольский В.М. Электрофизические и электрохимические методы обработки материалов: учебное пособие: в 2 т. М.: Высшая школа. 1983. Т. 1. 247 с. Т. 2. 208 с.
2. Верещака А.С. Работоспособность режущего инструмента с износостойкими покрытиями. М.: Машиностроение. 1993. 336 с.
3. Вороничев Н.М., Тартаковский Ж.Э., Генин В.Б. Автоматические линии из агрегатных станков. М.: Машиностроение. 1979. 487 с.
4. Дальский А.М., Гаврилюк В.С. Механическая обработка материалов: учебник для вузов. М.: Машиностроение. 1981. 266 с.
5. Немилов Е.Ф. Электроэрозионная обработка материалов. Л.: Машиностроение. 1983. 160 с.
6. Подураев В.Н. Автоматически регулируемые и комбинированные процессы резания. М.: Машиностроение. 1977. 303 с.
7. Силин С.С. Метод подобия при резании материалов. М.: Машиностроение. 1979. 152 с.

8. Старков В.К. Обработка резанием. Управление стабильностью и качеством в автоматизированном производстве. М.: Машиностроение. 1989. 297 с.
9. Трент Е.М. Резание металлов. М.: Машиностроение. 1980. 263 с.
10. Участки для электроэрозионной обработки рабочих деталей вырубных штампов и пресс-форм: методические рекомендации по проектированию. М.: ОНТИ ЭНИМС. 1983. 47 с.
11. Этин А.О. Кинематический анализ и выбор эффективных методов обработки лезвийным инструментом. М.: Машгиз. 1953. 173 с.
12. Янюшкин А.С., Шоркин В.С. Контактные процессы при электроалмазном шлифовании. М.: Машиностроение-1. 2004. 230 с.
13. Ящерицын П.И., Фельдштейн Е.Э., Корниевич М.А. Теория резания. Минск: Новое знание. 2006. 512 с.
14. Шум Ал.А. О симметрии функций, определенных в круге // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2014. Вып. 25. С. 3–8.
15. Шум Ал.А. Замечание об *s*-симметричных функциях // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2015. Вып. 27. С. 3–6.
16. Шум Ал.А. О центрах симметрии функции двух переменных // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2016. Вып. 30. С. 19–23.
17. Шум Ал.А. О центрах симметрии функции, определенной в выпуклой области плоскости // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2017. Вып. 31. С. 19–22.
18. Шум Ал.А. Симметрическая линия функции двух переменных // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2017. Вып. 32. С. 103–105.
19. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Симметрическая линия правильного однородного треугольника // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2018. Вып. 34. С. 47–53.
20. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Параметрические уравнения симметрической линии правильного однородного треугольника // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2018. Вып. 34. С. 44–47.
21. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Замечание о симметрии функций, определенных в шаре // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Технические науки»*. 2019. № 3 (3). С. 38–46.
22. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Об одном критерии *s*-симметрии функции трех переменных // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Технические науки»*. 2019. № 4 (4). С. 30–35.
23. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. О центрах симметрии функции трех переменных // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2020. № 1 (5). С. 71–78.
24. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. О центрах симметрии функции, определенной в выпуклой области пространства // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2020. № 2 (6). С. 57–65.
25. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Замечание о центрах *s*-симметрии и *c*-симметрии плоской пластины // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2021. № 1 (9). С. 63–70.

26. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Моменты плоской пластины относительно прямой и некоторые вопросы симметрии // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2021. № 2 (10). С. 78–84.
27. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. О центрах симметрии плоской выпуклой пластины // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2021. № 3 (11). С. 65–72.
28. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. О понятии *n*-симметрии пространственного тела // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии».* 2022. № 3 (15). С. 66–72.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ШУМ Александр Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет», 170026, Россия, г. Тверь, наб. А. Никитина, д. 22. E-mail: shum@tstu.tver.ru
ВЕТОШКИН Александр Михайлович – кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная математика, информатика и вычислительная техника», Мытищинский филиал ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университета им. Н.Э. Баумана», 141005, Россия, г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1. E-mail: vetkin@mgul.ac.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Шум Ал.А., Ветошкин А.М. О центрах симметрии выпуклого пространственного тела // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии». 2023. № 2 (18). С. 64–72.

ON THE CENTERS OF SYMMETRY OF A CONVEX SPATIAL BODY

Al.A. Shum[1], A.M. Vetoshkin[2]
[1]Tver State Technical University (Tver)
[2]Mytishchi branch of Moscow State Technical University
named after N. Uh. Bauman (Mytishchi, Moscow region)

Abstract. The concept of the center of *n*-symmetry of a spatial body introduced by the authors earlier is considered. It is indicated that special cases of this general concept are the center of *s*-symmetry (the center of 0-symmetry) and the center of *c*-symmetry (the center of 1-symmetry). The previously established criterion for the coincidence of the center of *s*-symmetry of a convex spatial body with the origin of coordinates is transferred to the general case of *n*-symmetry.

Keywords: symmetry, *c*-symmetry, *s*-symmetry, *n*-symmetry, center of symmetry, density function, convex body, mass, center of mass, electric bus.

REFERENCES

1. Artamonov B.A., Volkov Yu.S., Drozhzhalova V.I., Sedykhin F.V., Smolentsev V.P., Yampolsky V.M. Elektrofizicheskie i elektrohimicheskie metody obrabotki materialov: uchebnoye posobiye [Electrophysical and electrochemical methods of processing materials: manual]: in 2 vol. Moscow: Vysshaja shkola. 1983. Vol. 1. 247 p. Vol. 2. 208 p.
2. Vereschaka A.S. Rabotosposobnost' rezhushchego instrumenta s iznosostojkimi pokrytiyami [The performance of the cutting tool with wear-resistant coatings]. Moscow: Mashinostroenie. 1993. 336 p.
3. Voronichev N.M., Tartakovsky J.E., Genin V.B. Avtomaticheskie linii iz agregatnyh stankov [Automatic lines of modular machines]. Moscow: Mashinostroenie. 1979. 487 p.
4. Dalskiy A.M., Gavrilyuk V.S. Mekhanicheskaya obrabotka materialov [Mechanical treatment of materials: college textbook]. Moscow: Mechanical Engineering. 1981. 266 p.
5. Nemilov E.F. Elektroerozionnaya obrabotka materialov [Electroerosion treatment of materials]. L.: Mashinostroenie. 1983. 160 p.
6. Poduraev V.N. Avtomaticheski reguliruemye i kombinirovannye processy rezaniya [Automatically adjustable and combined cutting processes]. Moscow: Mashinostroenie. 1977. 303 p.
7. Silin S.S. Metod podobiya pri rezanii materialov [Method of similarity when cutting materials]. Moscow: Mashinostroenie. 1979. 152 p.
8. Starkov V.K. Obrabotka rezaniem. Upravlenie stabil'nost'yu i kachestvom v avtomatizirovannom proizvodstve [Cutting processing. Stability and quality management in automated production]. Moscow: Mashinostroenie. 1989. 297 p.
9. Trent E.M. Rezanie metallov [Metal cutting]. Moscow: Mashinostroenie. 1980. 263 p.
10. Uchastki dlya elektroerozionnoj obrabotki rabochih detalej vyrubnyh shtampov i press-form: metodicheskiye rekomendatsii po proyektirovaniyu [Areas for electrical discharge machining of working parts of cutting dies and molds: design guidelines]. Moscow: ONTI ENIMS. 1983. 47 p.
11. Etin A.O. Kinematicheskij analiz i vybor effektivnyh metodov obrabotki lezvijnym instrumentom [Kinematic analysis and selection of effective methods of processing with a climbing tool]. Moscow: Mashgiz. 1953. 173 p.
12. Yanushkin A.S., Shorkin V.S. Kontaktnye processy pri elektroalmaznom shlifovanii [Contact processes in electro-diamond grinding]. Moscow: Mashinostroenie-1. 2004. 230 p.
13. Yastcheritsyn P.I., Feldshtein E.E., Korniewicz M.A. Teoriya rezaniya [Theory of cutting]. Minsk: Novoe znanie. 2006. 512 p.
14. Shum Al.A. On the symmetry of the functions defined in the circle. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. 2014. Vol. 25, pp. 3–8. (In Russian).
15. Shum Al.A. The comment about *s*-symmetric functions. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. 2015. Vol. 27, pp. 3–6. (In Russian).
16. Shum Al.A. About the centers of symmetry of a function of two variables. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. 2016. Vol. 30, pp. 19–23. (In Russian).
17. Shum Al.A. About the centers of symmetry of a function defined in a convex domain of the plane. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. 2017. Vol. 31, pp. 19–22. (In Russian).
18. Shum Al.A. Symmetric line of a function of two variables. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. 2017. Vol. 32, pp. 103–105. (In Russian).
19. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. The symmetric line of a regular homogeneous triangle. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. 2018. Vol. 34, pp. 47–53. (In Russian).

20. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. Parametric equations of the symmetric line of a regular homogeneous triangle. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. 2018. Vol. 34, pp. 44–47. (In Russian).
21. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. A note on the symmetry of functions defined in a ball. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. *Seriya «Tehnicheskie nauki»*. 2019. No. 3 (3), pp. 38–46. (In Russian).
22. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. On one criterion of *s*-symmetry of a function of three variables. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. *Seriya «Tehnicheskie nauki»*. 2019. No. 4 (4), pp. 30–35. (In Russian).
23. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. About the centers of symmetry of a function of three variables. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. *Seriya «Stroitel'stvo. Elektrotehnika I himicheskie tehnologii»*. 2020. No. 1 (5), pp. 71–78. (In Russian).
24. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. About the centers of symmetry of the function, defined in a convex area of space. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. *Seriya «Stroitel'stvo. Elektrotehnika i himicheskie tehnologii».* 2020. No. 2 (6), pp. 57–65. (In Russian).
25. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. A note on the centers of *s*-symmetry and *c*-symmetry of a flat plate. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. *Seriya «Stroitel'stvo. Elektrotehnika i himicheskie tehnologii»*. 2021. No. 1 (9), pp. 63–70. (In Russian).
26. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. Moments of a flat plate relative to a straight line and some questions of symmetry. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. *Seriya «Stroitel'stvo. Elektrotehnika i himicheskie tehnologii».* 2021. No. 2 (10), pp. 78–84. (In Russian).
27. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. On the centers of symmetry of a flat convex plate. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. *Series «Construction. Electrical engineering and chemical technologies»*. 2021. No. 3 (11), pp. 65–72. (In Russian).
28. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. On the concept of *n*-symmetry of a spatial body. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. *Series «Construction. Electrical engineering and chemical technologies»*. 2022. No. 3 (15), pp. 66–72. (In Russian).

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

SHUM Alexander Anatolievich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Tver State Technical University, 22, embankment of A. Nikitin, Tver, 170026, Russia. E-mail: shum@tstu.tver.ru
VETOSHKIN Alexander Mikhailovich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Informatics and Computer Engineering of Mytishchi branch, Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, 1, 1st Institutskaya str., Mytishchi, 141005, Russia. E-mail: vetkin@mgul.ac.ru

CITATION FOR AN ARTICLE

Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. On the centers of symmetry of a convex spatial body // Vestnik of Tver State Technical University. Series «Building. Electrical engineering and chemical technology». 2023. No. 2 (18), pp. 64–72.