

**INFORMATION ABOUT THE AUTHOR**

*MARINOVA Svetlana Vasilevna* – Senior Lecturer of the Department of Power Supply and Electrical Equipment, FSBEI HE «Tver State Technical University», 22, embankment of A. Nikitin, Tver, 170026, Russia. E-mail: sv.marinova@yandex.ru

**CITATION FOR AN ARTICLE**

Marinova S.V. Improving the accuracy of power consumption forecast of industrial enterprise with its own generation // Vestnik of Tver State Technical University. Series «Building. Electrical engineering and chemical technology». 2022. No. 3(15), pp. 59–66.

УДК 629.7.052

**О ПОНЯТИИ  $n$ -СИММЕТРИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ТЕЛА**

*Ал.А. Шум<sup>1</sup>, А.М. Ветошкин<sup>2</sup>, Ан.А. Шум<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> *Тверской государственный технический университет (г. Тверь)*

<sup>2</sup> *Мытищинский филиал МГТУ им. Н.Э. Баумана  
(г. Мытищи, Московская область)*

© Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А., 2022

**Аннотация.** В статье на случай пространства переносено общее понятие  $n$ -симметрии. Рассмотрены вопросы  $n$ -симметрии пространственного тела. Введено понятие центра  $n$ -симметрии тела.

**Ключевые слова:** симметрия,  $c$ -симметрия,  $s$ -симметрия,  $n$ -симметрия, центр симметрии, центр  $n$ -симметрии, функция трех переменных, функция плотности, тело, масса, центр масс.

**DOI: 10.46573/2658-7459-2022-3-66-72**

**ВВЕДЕНИЕ**

На данный момент имеется большой выбор технологий для механической и физико-технической обработки деталей машин (о богатстве этого выбора можно составить представление по названиям [1–13]). При этом выбор той или иной технологии в каждом отдельном случае определенным образом зависит от характера распределения массы внутри обрабатываемой детали. Поэтому представляет интерес изучение свойств указанного распределения, в том числе и тех, которые обусловлены тем или иным видом симметрии. С этой точки зрения в работах [14–20, 25–27] изучались плоские детали, называемые пластинами [16], а в статьях [21–24] рассматривались объемные детали, то есть тела в пространстве. Настоящая статья продолжает эти исследования для случая пространства: она посвящена вопросам симметрии объемных деталей. В работах [26, 27] рассматривались понятия  $n$ -симметрии и центра  $n$ -симметрии для плоской пластины. В рамках этой статьи эти понятия переносятся на случай пространства и обсуждаются применительно к объемному телу произвольной формы.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБОСНОВАНИЯ

Описывается трехмерное евклидово пространство с заданной прямоугольной декартовой системой координат. Под *областью* понимается замкнутая область этого пространства, ограниченная некоторой поверхностью (которая также считается частью области). Область  $V_1$  называется *подобластью* области  $V$ , если  $V_1 \subseteq V$ .

Область  $V$  вместе с определенной в этой области непрерывной неотрицательной функцией трех переменных  $f(x, y, z)$  называется *телом*  $D$ , при этом функция  $f(x, y, z)$  является *плотностью* тела  $D$ . Подобласть области  $V$  вместе с соответствующим ограничением функции плотности  $f(x, y, z)$  называется *подтелом* тела  $D$ . *Массой* тела  $D$  (в соответствии с традиционным определением из [28]) именуется

$$m(D) = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz .$$

Несмотря на то, что функция плотности  $f(x, y, z)$  в некоторых точках области  $V$  может быть равной нулю, для любого тела  $D$  предполагается выполненным обязательное дополнительное условие: масса самого тела  $D$  и масса всякого его подтела должны быть больше нуля.

*Частью области*  $V$  называется одна или несколько ее подобластей, *частью тела*  $D$  – одно или несколько его подтел. Если часть  $G$  тела  $D$  состоит из нескольких подтел, то ее масса  $m(G)$  считается равной сумме масс этих подтел.

Плоскость называем *плоскостью  $n$ -симметрии* тела  $D$ , если она делит область  $V$  тела  $D$  на две части  $V_1$  и  $V_2$  так, что

$$\iiint_{V_1} (r(x, y, z))^n f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_2} (r(x, y, z))^n f(x, y, z) dx dy dz ,$$

где  $r(x, y, z)$  – расстояние от точки  $(x, y, z)$  до данной плоскости.

Если выбранная плоскость оказалась плоскостью  $n$ -симметрии рассматриваемого тела, то можно говорить, что данное тело является  *$n$ -симметричным* относительно этой плоскости. Отметим, что в случае с терминами, использующими  $n$ -симметрию, в отличие от терминов, связанных с  $c$ -симметрией и  $s$ -симметрией, префикс  $n$  представляет собой не просто букву (как  $c$  или  $s$ ), но целое неотрицательное число. Таким образом, общее понятие  $n$ -симметрии распадается на множество отдельных понятий: 0-симметрия, 1-симметрия, 2-симметрия и т. д. Легко заметить, что плоскость 0-симметрии представляет собой плоскость полумасс, в то время как плоскость 1-симметрии – плоскость равновесия (в соответствии с определениями из [16]). Следующая лемма является обобщением лемм 1 и 2 из статьи [23].

**Лемма.** *Существует единственная плоскость  $n$ -симметрии тела  $D$ , параллельная данной плоскости.*

*Доказательство.* Пусть плоскость  $\Pi$  проведена параллельно некоторой изначально заданной плоскости  $\Pi_0$  и делит область  $V$  на две части –  $V_1$  и  $V_2$ . Будем перемещать плоскость  $\Pi$ , оставляя параллельной самой себе (а значит, и плоскости  $\Pi_0$ ), в перпендикулярном ей (а значит, и плоскости  $\Pi_0$ ) направлении так, чтобы часть  $V_1$  возрастала, а часть  $V_2$  уменьшалась. При этом разность интегралов

$\iiint_{V_1} (r(x, y, z))^n f(x, y, z) dx dy dz - \iiint_{V_2} (r(x, y, z))^n f(x, y, z) dx dy dz$  будет строго возрастать, так

как первый из этих интегралов будет увеличиваться (поскольку будет увеличиваться часть  $V_1$ ), а второй – уменьшаться (поскольку будет сокращаться часть  $V_2$ ). Легко видеть, что при одном крайнем положении (когда часть  $V_1$  очень мала) значение этой разности будет меньше нуля, а при другом (когда часть  $V_2$  очень мала) – больше нуля. Из соображений непрерывности очевидным образом вытекает, что найдется единственное промежуточное положение плоскости  $\Pi$ , такое, при котором рассматриваемая разность будет равна нулю. Это положение плоскости  $\Pi$  и определит единственную плоскость  $n$ -симметрии тела  $D$ , параллельную изначально заданной плоскости  $\Pi_0$ .

Говорим, что *плоскости пересекаются в одной точке*, если имеется точка, принадлежащая всем этим плоскостям, и притом такая точка является единственной.

В соответствии с определениями из работы [23] центр полумасс тела  $D$  представляет собой точку, в которой пересекаются все плоскости полумасс этого тела (то есть все его плоскости 0-симметрии), а центр масс тела  $D$  – точку, в которой пересекаются все его плоскости равновесия (то есть все его плоскости 0-симметрии). Обобщая эти определения, естественно привести понятие *центра  $n$ -симметрии* тела  $D$ . Оно звучит следующим образом: *если все плоскости  $n$ -симметрии тела  $D$  пересекаются в одной точке, то эта точка является центром  $n$ -симметрии тела  $D$ .*

Таким образом, центр 0-симметрии тела  $D$  представляет собой центр полумасс этого тела, а центр 1-симметрии – его центр масс. В статье [23] отмечено, что центр 0-симметрии (центр масс) тела  $D$  всегда существует, в то время как его центр 1-симметрии (центр полумасс) может не существовать. Таким образом, в общем случае центр  $n$ -симметрии тела  $D$  есть не всегда.

Тело  $D$ , согласно определению, представляет собой пространственную область  $V$  вместе с определенной в этой области функцией плотности  $f(x, y, z)$ . Таким образом,  $n$ -симметрию тела  $D$  можно трактовать как  $n$ -симметрию функции трех переменных  $f(x, y, z)$  в области  $V$  (подобная трактовка преобладает в работах [21–24]).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Понятие центра  $n$ -симметрии тела  $D$  является обобщением известных понятий центра масс и центра полумасс. Введение общего понятия позволяет рассматривать известные ранее термины с единой точки зрения, что приводит к упрощению формулировок и сокращению доказательств. Следует отметить, что естественное требование  $f(x, y, z) \geq 0$ , накладываемое на функцию плотности, и условие строгой положительности массы любого подтела тела  $D$  существенно важны для доказательства рассмотренной в статье леммы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артамонов Б.А., Волков Ю.С., Дрожжалова В.И., Седыхин Ф.В., Смоленцев В.П., Ямпольский В.М. Электрофизические и электрохимические методы обработки материалов: учебное пособие. В 2 т. М.: Высшая школа. 1983. Т. 1. 247 с. Т. 2. 208 с.
2. Верещака А.С. Работоспособность режущего инструмента с износостойкими покрытиями. М.: Машиностроение. 1993. 336 с.
3. Вороничев Н.М., Тартаковский Ж.Э., Генин В.Б. Автоматические линии из агрегатных станков. М.: Машиностроение. 1979. 487 с.

4. Дальский А.М., Гаврилюк В.С. Механическая обработка материалов: учебник для вузов. М.: Машиностроение. 1981. 266 с.
5. Немилов Е.Ф. Электроэрозионная обработка материалов. Л.: Машиностроение. 1983. 160 с.
6. Подураев В.Н. Автоматически регулируемые и комбинированные процессы резания. М.: Машиностроение. 1977. 303 с.
7. Силин С.С. Метод подобия при резании материалов. М.: Машиностроение. 1979. 152 с.
8. Старков В.К. Обработка резанием. Управление стабильностью и качеством в автоматизированном производстве. М.: Машиностроение. 1989. 297 с.
9. Трент Е.М. Резание металлов. М.: Машиностроение. 1980. 263 с.
10. Участки для электроэрозионной обработки рабочих деталей вырубных штампов и пресс-форм: методические рекомендации по проектированию. М.: ОНТИ ЭНИМС. 1983. 47 с.
11. Этин А.О. Кинематический анализ и выбор эффективных методов обработки лезвийным инструментом. М.: Машгиз. 1953. 173 с.
12. Янюшкин А.С., Шоркин В.С. Контактные процессы при электроалмазном шлифовании. М.: Машиностроение-1. 2004. 230 с.
13. Ящерицын П.И., Фельдштейн Е.Э., Корниевич М.А. Теория резания. Минск: Новое знание. 2006. 512 с.
14. Шум Ал.А. О симметрии функций, определенных в круге // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2014. Вып. 25. С. 3–8.
15. Шум Ал.А. Замечание об  $s$ -симметричных функциях // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2015. Вып. 27. С. 3–6.
16. Шум Ал.А. О центрах симметрии функции двух переменных // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2016. Вып. 30. С. 19–23.
17. Шум Ал.А. О центрах симметрии функции, определенной в выпуклой области плоскости // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2017. Вып. 31. С. 19–22.
18. Шум Ал.А. Симметрическая линия функции двух переменных // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2017. Вып. 32. С. 103–105.
19. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Симметрическая линия правильного однородного треугольника // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2018. Вып. 34. С. 47–53.
20. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Параметрические уравнения симметрической линии правильного однородного треугольника // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2018. Вып. 34. С. 44–47.
21. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Замечание о симметрии функций, определенных в шаре // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Технические науки»*. 2019. № 3 (3). С. 38–46.
22. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Об одном критерии  $s$ -симметрии функции трех переменных // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Технические науки»*. 2019. № 4 (4). С. 30–35.
23. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. О центрах симметрии функции трех переменных // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2020. № 1 (5). С. 71–78.
24. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. О центрах симметрии функции, определенной в выпуклой области пространства // *Вестник Тверского государственного технического*

университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии». 2020. № 2 (6). С. 57–65.

25. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Замечание о центрах  $s$ -симметрии и  $c$ -симметрии плоской пластины // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии». 2021. № 1 (9). С. 63–70.

26. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Моменты плоской пластины относительно прямой и некоторые вопросы симметрии // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии». 2021. № 2 (10). С. 78–84.

27. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. О центрах симметрии плоской выпуклой пластины // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии». 2021. № 3 (11). С. 65–72.

28. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике (полный курс). М.: АЙРИС ПРЕСС. 2007. 604 с.

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

*ШУМ Александр Анатольевич* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет», 170026, Россия, г. Тверь, наб. А. Никитина, д. 22. E-mail: shum@tstu.tver.ru

*ВЕТОШКИН Александр Михайлович* – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики, информатики и вычислительной техники, Мытищинский филиал Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, 141005, Россия, г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1, Россия. E-mail: vetkin@mgul.ac.ru

*ШУМ Анатолий Александрович* – магистрант факультета информационных технологий, ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет», 170026, Россия, г. Тверь, наб. А. Никитина, д. 22.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. О понятии  $n$ -симметрии пространственного тела // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии». 2022. № 3 (15). С. 66–72.

---

### ON THE CONCEPT OF $N$ -SYMMETRY OF A SPATIAL BODY

*Al.A. Shum<sup>1</sup>, A.M. Vetoshkin<sup>2</sup>, An.A. Shum<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*Tver State Technical University (Tver)*

<sup>2</sup>*Mytishchi filial of MSTU named after N. Uh. Bauman (Mytishchi, Moscow region)*

**Abstract.** In the article the general concept of  $n$ -symmetry is transferred to the case of space. The issues of  $n$ -symmetry of a spatial body are considered. The concept of the center of  $n$ -symmetry of the body is introduced.

**Keywords:** symmetry,  $c$ -symmetry,  $s$ -symmetry,  $n$ -symmetry, center of symmetry, center of  $n$ -symmetry, function of three variables, density function, body, mass, center of mass.

## REFERENCES

1. Artamonov B.A., Volkov Yu.S., Drozhzhlova V.I., Sedykhin F.V., Smolentsev V.P., Yampolsky V.M. *Elektrofizicheskie i elektrohimicheskie metody obrabotki materialov: uchebnoye posobiye* [Electrophysical and electrochemical methods of processing materials: manual]. In 2 vol. Moscow: Vysshaya shkola. 1983. Vol. 1. 247 p. Vol. 2. 208 p.
2. Vereschaka A.S. *Rabotosposobnost' rezhushchego instrumenta s iznosostojkimi pokrytiami* [The performance of the cutting tool with wear-resistant coatings]. Moscow: Mashinostroenie. 1993. 336 p.
3. Voronichev N.M., Tartakovskiy J.E., Genin V.B. *Avtomaticheskie linii iz agregatnyh stankov* [Automatic lines of modular machines]. Moscow: Mashinostroenie. 1979. 487 p.
4. Dalskiy A.M., Gavrilyuk V.S. *Mekhanicheskaya obrabotka materialov* [Mechanical treatment of materials: college textbook]. Moscow: Mechanical Engineering. 1981. 266 p. (In Russian).
5. Nemilov E.F. *Elektroerozionnaya obrabotka materialov* [Electroerosion treatment of materials]. L.: Mashinostroenie. 1983. 160 p.
6. Poduraev V.N. *Avtomaticheski reguliruemye i kombinirovannye processy rezaniya* [Automatically adjustable and combined cutting processes]. Moscow: Mashinostroenie. 1977. 303 p.
7. Silin S.S. *Metod podobiya pri rezanii materialov* [Method of similarity when cutting materials]. Moscow: Mashinostroenie. 1979. 152 p.
8. Starkov V.K. *Obrabotka rezaniem. Upravlenie stabil'nost'yu i kachestvom v avtomatizirovannom proizvodstve* [Cutting processing. Stability and quality management in automated production]. Moscow: Mashinostroenie. 1989. 297 p.
9. Trent E.M. *Rezanie metallov* [Metal cutting]. Moscow: Mashinostroenie. 1980. 263 p.
10. *Uchastki dlya elektroerozionnoy obrabotki rabochih detalej vyrubnyh shtampov i press-form: metodicheskkiye rekomendatsii po proyektirovaniyu* [Areas for electrical discharge machining of working parts of cutting dies and molds: design guidelines]. Moscow: ONTI ENIMS. 1983. 47 p.
11. Etin A.O. *Kinematicheskij analiz i vybor effektivnyh metodov obrabotki lezviynym instrumentom* [Kinematic analysis and selection of effective methods of processing with a climbing tool]. Moscow: Mashgiz. 1953. 173 p.
12. Yanushkin A.S., Shorkin V.S. *Kontaktnye processy pri elektroalmaznom shlifovanii* [Contact processes in electro-diamond grinding]. Moscow: Mashinostroenie-1. 2004. 230 p.
13. Yastcheritsyn P.I., Feldshtein E.E., Korniewicz M.A. *Teoriya rezaniya* [Theory of cutting]. Minsk: Novoe znanie. 2006. 512 p.
14. Shum A.I.A. On the symmetry of the functions defined in the circle. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnikeskogo universiteta*. 2014. Vol. 25, pp. 3–8. (In Russian).
15. Shum A.I.A. The comment about  $s$ -symmetric functions. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnikeskogo universiteta*. 2015. Vol. 27, pp. 3–6. (In Russian).
16. Shum A.I.A. About the centers of symmetry of a function of two variables. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnikeskogo universiteta*. 2016. Vol. 30, pp. 19–23. (In Russian).
17. Shum A.I.A. About the centers of symmetry of a function defined in a convex domain of the plane. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnikeskogo universiteta*. 2017. Vol. 31, pp. 19–22. (In Russian).
18. Shum A.I.A. Symmetric line of a function of two variables. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnikeskogo universiteta*. 2017. Vol. 32, pp. 103–105. (In Russian).
19. Shum A.I.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. The symmetric line of a regular homogeneous triangle. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnikeskogo universiteta*. 2018. Vol. 34, pp. 47–53. (In Russian).

20. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. Parametric equations of the symmetric line of a regular homogeneous triangle. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta*. 2018. Vol. 34, pp. 44–47. (In Russian).
21. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. A note on the symmetry of functions defined in a ball. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta. Seriya «Tehničeskije nauki»*. 2019. No. 3 (3), pp. 38–46. (In Russian).
22. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. On one criterion of  $s$ -symmetry of a function of three variables. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta. Seriya «Tehničeskije nauki»*. 2019. No. 4 (4), pp. 30–35. (In Russian).
23. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. About the centers of symmetry of a function of three variables. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta. Seriya «Stroitel'stvo. Elektrotehnika I himičeskije tehnologii»*. 2020. No. 1 (5), pp. 71–78. (In Russian).
24. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. About the centers of symmetry of the function, defined in a convex area of space. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta. Seriya «Stroitel'stvo. Elektrotehnika i himičeskije tehnologii»*. 2020. No. 2 (6), pp. 57–65. (In Russian).
25. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. A note on the centers of  $s$ -symmetry and  $c$ -symmetry of a flat plate. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta. Seriya «Stroitel'stvo. Elektrotehnika i himičeskije tehnologii»*. 2021. No. 1 (9), pp. 63–70. (In Russian).
26. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. Moments of a flat plate relative to a straight line and some questions of symmetry. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta. Seriya «Stroitel'stvo. Elektrotehnika i himičeskije tehnologii»*. 2021. No. 2 (10), pp. 78–84. (In Russian).
27. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. On the centers of symmetry of a flat convex plate. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta. Series «Construction. Electrical engineering and chemical technologies»*. 2021. No. 3 (11), pp. 65–72. (In Russian).
28. Pismennyi D.T. Konspekt lektsiy po vysshey matematike (polnyy kurs) [Lecture notes on higher mathematics (full course)]. Moscow: AIRIS PRESS. 2007. 604 p.

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

*SHUM Alexander Anatolievich* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, FSBEI HE «Tver State Technical University», 22, embankment of A. Nikitin, Tver, 170026, Russia. E-mail: shum@tstu.tver.ru

*VETOSHKIN Alexander Mikhailovich* – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Informatics and Computer Engineering, State Technical University named after N.E. Bauman, 1, 1st Institut'skaya street, Mytishchi city, 141005, Russia. E-mail: vetkin@mgul.ac.ru

*SHUM Anatolij Alexandrovich* – Master's Student of the Faculty of Information Technologies, FSBEI HE «Tver State Technical University», 22, embankment of A. Nikitin, Tver, 170026, Russia.

#### CITATION FOR AN ARTICLE

Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. On the concept of  $n$ -symmetry of a spatial body // *Vestnik of Tver State Technical University. Series «Building. Electrical engineering and chemical technology»*. 2022. No. 3 (15), pp. 66–72.