

УДК 624.046.3

**УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ ИЗ СТАЛИ 45  
ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ****С.В. Черемных***Тверской государственной технической университет (г. Тверь)*

© Черемных С.В., 2021

**Аннотация.** Решается задача бифуркации шарнирно подкрепленного стержня при простом комбинированном докритическом нагружении с учетом упругой и упруго-пластической стадии деформирования материала. Рассмотрено поведение прямолинейного стержня в некоторой упругопластической системе, подвергающейся действию внешних сил в плоскости  $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$  девиаторного пространства деформаций А.А. Ильюшина. Установлено, что потеря устойчивости стержня развивается в процессе роста нагрузки весьма медленно и на практике ее трудно заметить. Получены расчетные формулы для критической нагрузки. Показано, что в зависимости от условий работы стержня в конструкции критическая нагрузка может оказаться любой из интервала от касательно-модульного значения Энгессера до значения Эйлера, исключая само значение Эйлера, которое достигается только упругим стержнем.

**Ключевые слова:** стержень, комбинированное нагружение, бифуркация, прогиб, касательно-модульная теория, приведенно-модульная теория.

**DOI: 10.46573/2658-7459-2021-4-56-65****ВВЕДЕНИЕ**

В существующих теориях устойчивости за пределом упругости стержней, пластинок и оболочек последние рассматриваются изолированно от окружающих элементов конструкций, что не позволяет достаточно полно отразить их поведение в момент потери устойчивости. В настоящей работе используется предложенная А.А. Ильюшиным [1] новая постановка задач упругопластической устойчивости в применении к устойчивости стержней.

Известно, что в зависимости от истории процесса нагружения упругопластической системы ее окончательная деформация, соответствующая одной и той же внешней нагрузке, будет различной. Поэтому при исследовании задач неупругой устойчивости следует исходить из анализа различных процессов нагружения, приводящих к различным критическим нагрузкам и деформациям. В связи с этим возникает не только вопрос о той истории нагружения, которая приводит к минимальному значению критических нагрузок, но и не менее важный вопрос о выборе и осуществлении такой истории нагружения данной системы, которая дает для нее максимальное значение предела устойчивости и несущей способности [2, 3].

Бифуркацию по Эйлеру и Карману называют иногда бифуркацией состояния, так как она происходит при постоянном значении сжимающей нагрузки. Часто бифуркацию состояния противопоставляют бифуркации процесса нагружения и деформирования. Такое

противопоставление является искусственным, ибо любое состояние равновесия может быть достигнуто только после осуществления некоторого процесса нагружения, историю которого неупругая система запоминает, в отличие от упругой системы [2, 4].

В работе рассмотрена устойчивость шарнирно опертых стержней и получены расчетные формулы для критической нагрузки [3]. Показано, что в зависимости от условий работы стержня в конструкции критическая нагрузка может оказаться любой из интервала от касательно-модульного значения Энгессера до значения Эйлера, исключая само значение Эйлера, которое достигается только упругим стержнем [5–8]. После-критическое поведение стержней в конструкциях в работе не изучается.

### МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Пусть прямолинейный стержень сжат в некоторой конструкции силами, причем осевое напряжение  $\sigma$  превосходит предел упругости материала. Будем считать, что при потере устойчивости такого стержня передаваемая на него нагрузка  $P$  может как измениться на некоторую величину  $\delta P$ , так и остаться постоянной. Рассмотрим такие стержни, концы которых шарнирно соединены с остальной частью конструкции [3].

Рассматриваем процессы простого (пропорционального) нагружения в девиаторном пространстве напряжений А.А. Ильюшина [9–11] в соответствии с рис. 1.

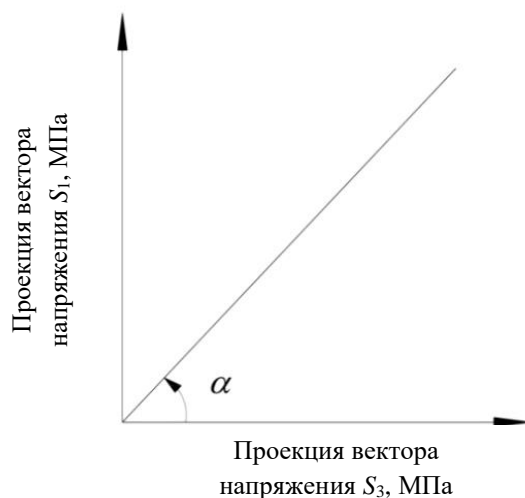


Рис. 1. Траектория нагружения

Принимаем [2]

$$\operatorname{tg} \alpha = S_1 / S_3, \quad (1)$$

где  $S_1$ ,  $S_3$  – компоненты вектора напряжений, принятые в соответствии с условием [2]:

$$S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} S_{11} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{11}; S_3 = \sqrt{2} \sigma_{12}; \quad (2)$$

$$S_{11} = \sigma_{11} - \sigma_0 = \frac{2}{3} \sigma_{11}; \sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{11},$$

где  $S_{11}$ ;  $S_{12} = \sigma_{12}$  – компоненты тензора-девиатора напряжений;  $\sigma_0$  – среднее напряжение в точке тела.

Подставив в выражение (2) значения (1), имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}\sigma_{11}}{\sqrt{3}\sqrt{2}\sigma_{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}}. \quad (3)$$

В тонкостенном круговом поперечном сечении оболочки напряжения примем:

$$\tau = \frac{M_{\kappa}}{2\pi R^2 t} = \sigma_{12}; \sigma_{11} = \frac{P}{2\pi R t}. \quad (4)$$

Получим уравнение

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{P 2\pi R^2 t}{2\pi R t M_{\kappa}} = \frac{PR}{\sqrt{3}M_{\kappa}}. \quad (5)$$

В результате преобразований при  $P = \sigma_{11} 2\pi R t$ , а также введя дополнительные безразмерные величины  $\lambda' = l/R$ , решим квадратное уравнение

$$\frac{\lambda'^2}{E^2 \cdot 3\operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \sigma_{11}^2 + \frac{2 \cdot \lambda'^2}{E} \cdot \sigma_{11} - \pi^2 = 0. \quad (6)$$

Окончательно имеем [2]

$$\sigma_{11} = 3\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot E \cdot \left[ -1 \pm \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{3\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \lambda'^2}} \right]. \quad (7)$$

### РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для нелинейно-упругих систем задача о бифуркации упругого стержня была впервые решена Энгессером на основе критерия Эйлера и получена так называемая касательно-модульная нагрузка [12, 13].

При решении задачи бифуркации стержня за пределом упругости по теориям Энгессера и Кармана в формулу (7) вместо модуля Юнга  $E$  необходимо подставить касательный модуль материала  $E_{\kappa}$  либо приведенный модуль  $E_{np}$  соответственно. При этом решение, в силу нелинейной зависимости критического напряжения от значений соответствующих модулей, не является однозначным. Поэтому расчет будем вести по следующему алгоритму [2].

В результате потери устойчивости центрально сжатого стержня в некоторой конструкции происходит перераспределение усилий между ее элементами.

Приведем уравнение (7) к квазилинейному виду

$$\sigma_{11} = a \cdot E_{\kappa}(E_{np}), \quad (8)$$

где

$$a = 3\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{3\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \lambda'^2}} \right]. \quad (9)$$

Зададимся значением угла  $\alpha$  (см. рис. 1). При принятом  $\alpha$  построим графики квазилинейной функции (8), дискретно варьируя значения гибкости  $\lambda'$  в выражении (8), до пересечения данных графиков с графиками зависимостей  $\sigma_{\kappa} \square E_{\kappa}(E_{np})$ .

Для стержней после бифуркации при нагрузке наблюдается неединственность решения задачи, а также резкое возрастание прогибов, которое, как правило, приводит либо к разрушению стержней, либо к недопустимо большим их деформациям. У стержней после бифуркации отмечается резкое падение сжимающей нагрузки при одновременном росте перемещений. Стержни весьма чувствительны к начальным несовершенствам формы, поэтому при анализе их поведения основное значение имеет максимальная нагрузка, которую стержень выдерживает перед наступлением катастрофического выпучивания. Для определения же максимальной нагрузки необходимо решить нелинейную задачу о выпучивании с учетом начальных прогибов либо других начальных несовершенств [14–17].

Точки пересечения графиков позволяют определить значение критического напряжения, соответствующего принятой гибкости  $\lambda$ . В качестве примера на рис. 2, 3 проиллюстрирована процедура вычисления критических напряжений для различных углов  $\alpha$ . Цифрами на рисунках обозначены: 1 – расчет по приведенно-модульной теории; 2 – расчет по касательно-модульной теории.

1. При  $\alpha = 80^\circ$

$$\sigma_{11} = 3 \cdot 5,67^2 \cdot E_{к,нр} \cdot \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{3 \cdot 5,67^2} \cdot \frac{1}{\lambda'^2}} \right] = 96,446 \cdot E_{к,нр} \cdot \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{0,10233}{\lambda'^2}} \right].$$

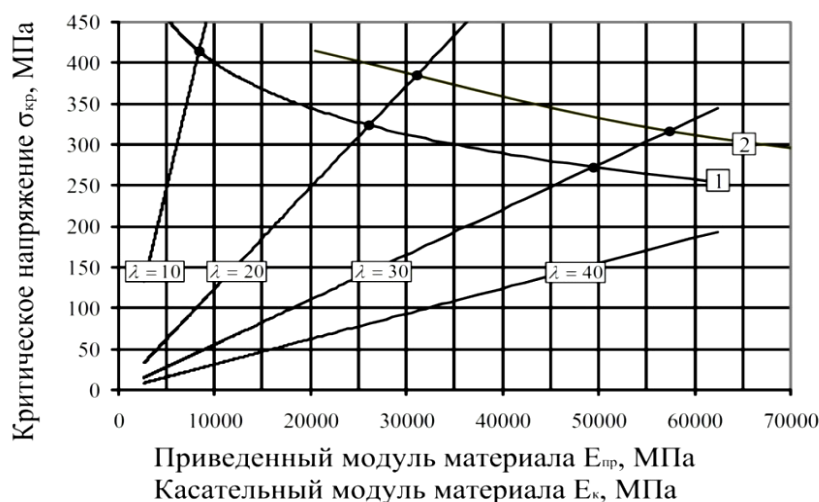


Рис. 2. Критическое напряжение при расчете стержней по теориям Энгессера и Кармана ( $\alpha = 80^\circ$ )

2. При  $\alpha = 15^\circ$

$$\sigma_{11} = 3 \cdot 0,267^2 \cdot E_{к,нр} \cdot \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{3 \cdot 0,267^2} \cdot \frac{1}{\lambda'^2}} \right] = 0,215 \cdot E_{к,нр} \cdot \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{46,148}{\lambda'^2}} \right].$$

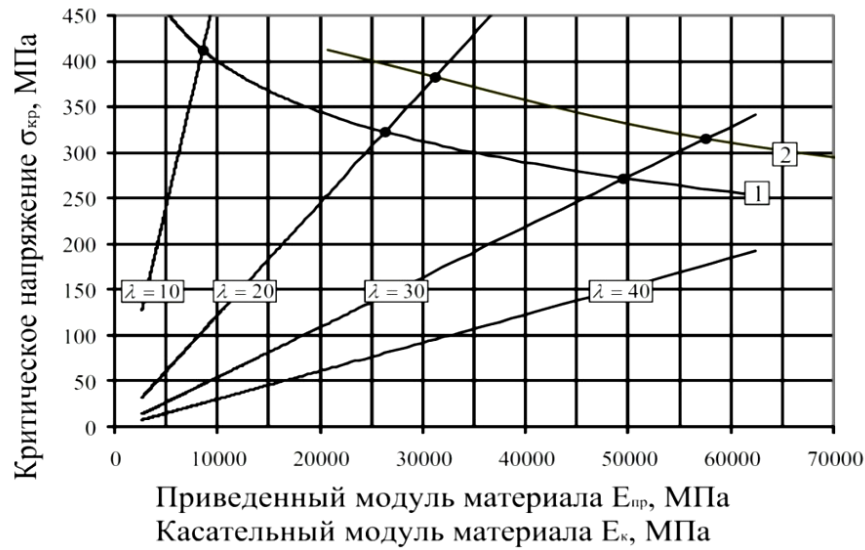


Рис. 3. Критическое напряжение при расчете стержней по теориям Энгессера и Кармана ( $\alpha = 15^0$ )

Кроме того, проведены расчеты и построены графики зависимостей критических напряжений от значений приведенного и касательного модуля материала:

при  $\alpha = 70^0$

$$\sigma_{11} = 3 \cdot 2,74^2 \cdot E_{к,пр} \cdot \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{3 \cdot 2,74^2} \cdot \frac{1}{\lambda'^2}} \right] = 22,64 \cdot E_{к,пр} \cdot \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{0,438}{\lambda'^2}} \right];$$

при  $\alpha = 60^0$

$$\sigma_{11} = 3 \cdot 1,73^2 \cdot E_{к,пр} \cdot \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{3 \cdot 1,73^2} \cdot \frac{1}{\lambda'^2}} \right] = 8,97 \cdot E_{к,пр} \cdot \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{1,099}{\lambda'^2}} \right];$$

при  $\alpha = 30^0$

$$\sigma_{11} = 3 \cdot 0,577^2 \cdot E_{к,пр} \cdot \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{3 \cdot 0,577^2} \cdot \frac{1}{\lambda'^2}} \right] = E_{к,пр} \cdot \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{9,88159}{\lambda'^2}} \right].$$

В результате получим зависимость критического напряжения от гибкости стержня для приведенно-модульной и касательно-модульной теории. В упругой стадии работы материала, при  $\sigma < 250$  МПа и  $E = 2,06 \cdot 10^5$  МПа, решение строим по формуле (9).

Результаты расчетов критических напряжений в зависимости от гибкости стержня представлены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Расчет по касательно-модульной теории

$\alpha$ , град	Критическое напряжение $\sigma$ , МПа, при гибкости стержня $\lambda$		
	$\lambda = 10$	$\lambda = 20$	$\lambda = 30$
15	407,9	320,8	271,3
30	411,8	322,1	271,5
60	413,5	323,2	272,0
70	414,6	323,9	272,6
80	414,8	324,0	272,9
85	414,9	324,1	273

Таблица 2

Расчет по приведенно-модульной теории

$\alpha$ , град	Критическое напряжение $\sigma$ , МПа, при гибкости стержня $\lambda$			
	$\lambda = 10$	$\lambda = 20$	$\lambda = 30$	$\lambda = 40$
15	462,2	381,0	314,9	269,0
30	463,0	381,8	315,2	269,5
60	463,9	383,2	315,6	270,2
70	464,5	384,0	315,9	270,5
80	464,9	384,5	316,1	270,8
85	467,1	384,7	316,2	270,9

На рис. 4 приведен расчетный график зависимости критического напряжения от гибкости стержня для процесса комбинированного нагружения при  $\alpha = 80^\circ$ .

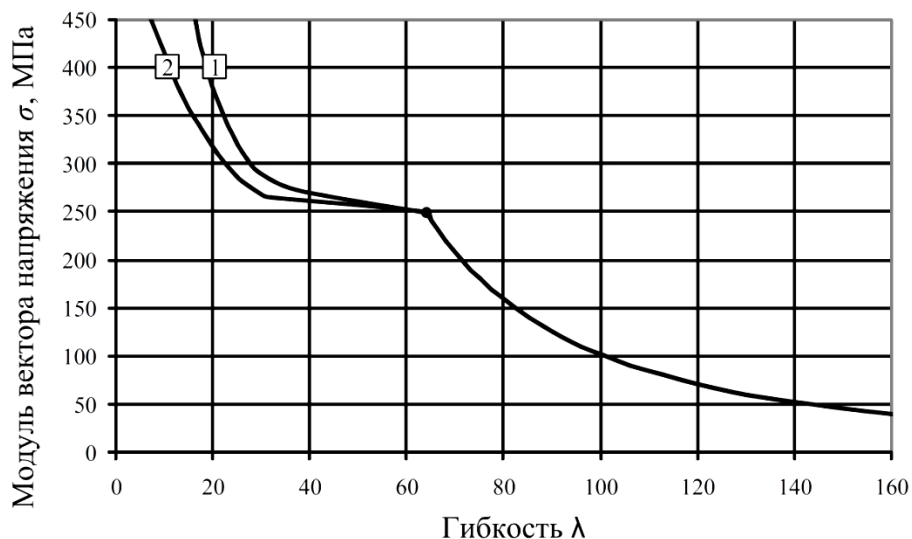


Рис. 4. Зависимость критического напряжения от гибкости стержня ( $\alpha = 80^\circ$ )

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании полученных решений можно сделать вывод, что для стали 45 значения угла  $\alpha$  не играют существенной роли при итоговом определении критических напряжений. Следует отметить, что при уменьшении гибкости разница между напряжениями, вычисленными по касательно-модульной теории и приведенно-модульной теории, увеличивается. Так, при  $\alpha = 15^\circ$  и  $\lambda = 30$  значения напряжений по касательно-модульной теории  $\sigma = 271,3$  МПа, а по приведенно-модульной теории  $\sigma = 314,9$  МПа. При  $\lambda = 20$  значения напряжений по касательно-модульной теории  $\sigma = 320,8$  МПа, по приведенно-модульной теории  $\sigma = 381,0$  МПа.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: МГУ, 1990. 310 с.
2. Зубчанинов В.Г. Устойчивость и пластичность. Т. 1. Устойчивость. М.: Физматлит. 2007. 448 с.
3. Устойчивость упругопластических оболочек при сложных процессах комбинированного нагружения: монография / С.В. Черемных [и др.]. Тверь: ТвГТУ. 2021. 160 с.
4. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука. 1967. 984 с.
5. Leung A.Y.T., Rajendran S. Global bifurcation of a three-hinged rod subject to a kind of follower force // *Computers & Structures*. 1996. V. 58. № 3, pp. 513–534.
6. Wolfe P. Bifurcation theory of an elastic conducting rod in a magnetic field // *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 1988. V. 41. № 2. P. 265.
7. Wang Ch.Yi. On the bifurcation solutions of an axially rotating rod // *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 1982. V. 35. № 3. P. 391.
8. Liu Y.Z., Zu J.W. Stability and bifurcation of helical equilibrium of a thin elastic rod // *Acta Mechanica*. 2004. V. 167. № 1-2, pp. 29–39. DOI: 10.1007/s00707-003-0060-3

9. Охлопков Н.Л., Черемных С.В. Устойчивость тонкостенных упругопластических конструкций при реализации процессов сложного комбинированного деформирования // *Известия МГТУ «МАМИ». Естественные науки*. 2013. № 2 (24). Т. 4. С. 109–114.
10. Охлопков Н.Л., Черемных С.В. О предельных поверхностях критических напряжений и деформаций материала в решении задачи устойчивости круговой цилиндрической оболочки при простых процессах // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. Орел: Госуниверситет УНПК. 2012. № 5 (295). С. 30–36.
11. Cheremnykh S., Zubchaninov V., Gulyaev V. Deformation of Cylindrical Shells of Steel 45 under Complex Loading. *XXII Int. Scientific Conf. «Construction the Formation of Living Environment» (FORM-2019)*. V. 97, pp. 1–8. DOI: 10.1051/e3sconf/20199704025
12. Glavardanov V.B., Maretic R.B. Secondary bifurcation of a compressible rod with spring-supports // *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2014. V. 46, pp. 72–83. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2014.02.002
13. Glavardanov V.B., Maretic R.B., Zigic M.M., Grahovac N.M. Secondary bifurcation of a shearable rod with nonlinear spring supports // *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2017. V. 66, pp. 433–445. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2017.08.007
14. Eremin A.V., Zhukov V.V., Kudinov V.A., Kudinov I.V. Resonant and bifurcation oscillations of the rod with regard to the resistance forces and relaxation properties of the medium // *Mechanics of Solids*. 2018. V. 53. № 5, pp. 584–590. DOI: 10.3103/S0025654418080125
15. Шейдаков Д.Н., Михайлова И.Б. Бифуркация равновесия микрополярного стержня из функционально-градиентного материала в условиях комбинированного нагружения // *Вестник Южного научного центра РАН*. 2014. Т. 10. № 3. С. 3–9.
16. Еремин А.В., Жуков В.В., Кудинов И.В., Кудинов В.А. Резонансные и бифуркационные колебания стержня с учетом сил сопротивления и релаксационных свойств среды // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2018. № 5. С. 124–132.
17. Sharafutdinova G.G. An operator method for studying the euler problem on types of the loss of stability for a pivoted rod under buckling load // *Russian Mathematics*. 2010. V. 54. № 11, pp. 77–82. DOI: 10.3103/S1066369X10110083

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

*ЧЕРЕМНЫХ* Степан Валерьевич – старший преподаватель кафедры конструкций и сооружений, ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет», 170026, г. Тверь, наб. Аф. Никитина, д. 22. E-mail: [cheremnykh\\_s.v@mail.ru](mailto:cheremnykh_s.v@mail.ru)

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Черемных С.В. Упругопластическая устойчивость стержня из стали 45 при комбинированном нагружении // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии»*. 2021. № 4 (12). С. 56–65.



**ELASTIC-PLASTIC STABILITY OF THE STEEL ROD 45  
UNDER COMBINED LOADING***S.V. Cheremnykh**Tver State Technical University (Tver)*

**Abstract.** The problem of bifurcation of a pivotally supported rod under simple combined subcritical loading is solved, taking into account the elastic and elastic-plastic stages of material deformation. Let us consider the behavior of a rectilinear rod in a certain elastic-plastic system exposed to external forces in the plane of the deviator space of deformations of A.A. Ilyushin  $\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_3$ . The obtained graphs show that the loss of stability of the rod develops very slowly during the growth of the load and in practice it is difficult to notice it. Calculated formulas for the critical load are obtained. It is shown that, depending on the operating conditions of the rod in the structure, the critical load can be any of the range from the relative-modular Engesser value to the Euler value, excluding the Euler value itself, which is achieved only by an elastic rod.

**Keywords:** rod, combined loading, bifurcation, deflection, tangential-modular theory, reduced-modular theory.

**REFERENCES**

1. Ilyushin A.A. *Mekhanika sploshnoj sredy* [Continuum Mechanics]. Moscow: MSU. 1990. 310 p.
2. Zubchaninov V.G. *Ustojchivost' i plastichnost'* [Stability and ductility]. Vol. 1. Stability. Tver: Fizmatlit. 2007. 448 p.
3. Cheremnykh S.V., Sokolov S.A., Gulyaev V.I., Alekseev A.A. *Ustojchivost' uprugoplasticheskikh obolochek pri slozhnyh processah kombinirovannogo nagruzheniya* [Stability of elastic-plastic shells under complex combined loading processes]. Tver: TvGTU. 2021. 160 p.
4. Volmir A.S. *Ustojchivost' deformiruemykh sistem* [Stability of deformable systems]. Moscow: Nauka. 1967. 984 p.
5. Leung A.Y.T., Rajendran S. Global bifurcation of a three-hinged rod subject to a kind of follower force. *Computers & Structures*. 1996. V. 58. No. 3, pp. 513–534. (In Russian).
6. Wolfe P. Bifurcation theory of an elastic conducting rod in a magnetic field. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 1988. V. 41. No. 2, pp. 265. (In Russian).
7. Wang Ch.Yi. On the bifurcation solutions of an axially rotating rod. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 1982. V. 35. No. 3, pp. 391. (In Russian).
8. Liu Y.Z., Zu J.W. Stability and bifurcation of helical equilibrium of a thin elastic rod. *Acta Mechanica*. 2004. V. 167. No. 1–2, pp. 29–39. DOI: 10.1007/s00707-003-0060-3
9. Ohlopkov N.L., Cheremnykh S.V. Stability of thin-walled elastic-plastic structures in the implementation of complex combined deformation processes. *Izvestiya MGTU «MAMI». Estestvennye nauki*. 2013. No. 2 (24). Vol. 4, pp. 109–114. (In Russian).
10. Ohlopkov N.L., Cheremnykh S.V. On the limiting surfaces of critical stresses and deformations of a material in solving the problem of stability of a circular cylindrical shell in simple processes. *Fundamentalnie i prikladnie problemi tehniki i tehnologii*. Orel: Gosuniversitet UNPK. 2012. No. 5 (295), pp. 30–36. (In Russian).

11. Cheremnykh S., Zubchaninov V., Gulyaev V. Deformation of cylindrical shells of steel 45 under complex loading. *XXII Int. Scientific Conf. «Construction the Formation of Living Environment» (FORM-2019)*. V. 97, pp. 1–8. DOI: 10.1051/e3sconf/20199704025 (In Russian).
12. Glavardanov V.B., Maretic R.B. Secondary bifurcation of a compressible rod with spring-supports. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2014. V. 46, pp. 72–83. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2014.02.002
13. Glavardanov V.B., Maretic R.B., Zigic M.M., Grahovac N.M. Secondary bifurcation of a shearable rod with nonlinear spring supports. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2017. V. 66, pp. 433–445. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2017.08.007
14. Eremin A.V., Zhukov V.V., Kudinov V.A., Kudinov I.V. Resonant and bifurcation oscillations of the rod with regard to the resistance forces and relaxation properties of the medium. *Mechanics of Solids*. 2018. V. 53. No. 5, pp. 584–590. DOI: 10.3103/S0025654418080125
15. Shejdakov D.N., Mihajlova I.B. Bifurcation of the equilibrium of a micropolar rod made of a functional gradient material under combined loading conditions. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo centra RAN*. 2014. V. 10. No. 3, pp. 3–9. (In Russian).
16. Eremin A.V., Zhukov V.V., Kudinov I.V., Kudinov V.A. Resonant and bifurcation vibrations of the rod taking into account the resistance forces and relaxation properties of the medium. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*. 2018. No. 5, pp. 124–132. (In Russian).
17. Sharafutdinova G.G. An operator method for studying the euler problem on types of the loss of stability for a pivoted rod under buckling load. *Russian Mathematics*. 2010. V. 54. No. 11, pp. 77–82. DOI: 10.3103/S1066369X10110083

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

*CHEREMNYKH Stepan Valerievich* – Senior Lecturer of the Department of Constructions and Structures, Tver State Technical University, 22, embankment Af. Nikitin, Tver, 170026, Russia. E-mail: *cheremnykh\_s.v@mail.ru*

#### CITATION FOR AN ARTICLE

Cheremnykh S.V. Elastic-plastic stability of the steel rod 45 under combined loading // *Vestnik of Tver State Technical University. Series «Building. Electrical engineering and chemical technology»*. 2021. No. 4 (12), pp. 56–65.