УДК 621.313

МОМЕНТЫ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ И НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СИММЕТРИИ

Ал.А. Шум[1], А.М. Ветошкин[2], Ан.А. Шум[1]
[1]Тверской государственный технический университет (г. Тверь)
[2]Мытищинский филиал МГТУ им. Н.Э. Баумана
(г. Мытищи, Московская область)

© Шум Ал.А., Ветошкин А.М.,
Шум Ан.А., 2021

Аннотация. Рассматривается понятие момента n-го порядка плоской пластины относительно заданной прямой. Прямая объявляется линией n-симметрии в случае, если моменты n-го порядка двух подпластин, на которые исходная пластина делится этой прямой, одинаковы. При этом линии 0-симметрии оказываются линиями полумасс, а линии 1-симметрии – линиями равновесия. На более общий случай линий n-симметрии переносится лемма, доказанная ранее для линий полумасс и линий равновесия.

Ключевые слова: симметрия, c-симметрия, s-симметрия, центр симметрии, линия полумасс, линия равновесия, функция плотности, масса, центр масс, электрическая машина.

DOI: 10.46573/2658-7459-2021-78-84

ВВЕДЕНИЕ

На данный момент существует большое количество технологий и методов механической и физико-технической обработки деталей машин (они описаны, например, в работах [1–13]). При выборе какой-либо из этих технологий часто приходится для изготовления и балансировки деталей электрических машин учитывать распределение массы внутри обрабатываемой детали. Это распределение определяется соответствующей функцией плотности, поэтому представляет интерес изучение свойств функции плотности, в том числе и тех, которые связаны с каким-либо видом симметрии. В работах [14–20] рассматривались вопросы симметрии функции плотности, зависящей от двух переменных, и плоские детали (называемые *пластинами* [16]). В статьях [21–24] были описаны объемные детали (таким образом, были освещены вопросы симметрии функции плотности, зависящей от трех переменных). Данная статья продолжает исследования симметрии плоских деталей (пластин), т. е. симметрии функции плотности, зависящей от двух переменных.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБОСНОВАНИЯ

Рассмотрим плоскость с заданной на ней прямоугольной декартовой системой координат. *Простой областью* называется область этой плоскости, ограниченная замкнутой линией без самопересечений (граница области считается частью области, таким образом, всякая простая область *замкнута*). Под *областью* понимается простая область или объединение нескольких простых областей. Область S_1 называется *подобластью* области S, если $S_1 \subseteq S$. Простая область S вместе с определенной в этой области непрерывной неотрицательной функцией двух переменных $f(x,y)$ называется *пластиной* D, при этом функция $f(x,y)$ представляет собой *плотность* пластины D. Подобласть области S вместе с соответствующим ограничением функции $f(x,y)$ называется *подпластиной* пластины D (заметим, что область подпластины, в отличие от области пластины, не обязана быть простой).

Массой пластины D называется $m(\mathrm{D}) = \iint\limits_{\mathrm{S}} f(x,y)dxdy$. Несмотря на то, что функция $f(x,y)$ в некоторых точках области S может быть равной нулю, для любой пластины D предполагается, что выполнено обязательное дополнительное условие: масса самой пластины D и масса всякой ее подпластины должны быть больше нуля.

Прямая линия называется *линией полумасс* пластины D, если она делит эту пластину на две подпластины одинаковой массы. Прямая линия называется *линией равновесия* пластины D, если она делит область S пластины D на две подобласти – S_1 и S_2 – так, что $\iint\limits_{\mathrm{S}_1} r(x,y)\, f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\mathrm{S}_2} r(x,y)\, f(x,y)dxdy$, где $r(x,y)$ – расстояние от точки (x,y) до данной прямой (заметим, что прямая является линией равновесия пластины в том и только том случае, когда эта пластина, положенная на лезвие бритвы вдоль данной прямой, будет сохранять равновесие).

Рассмотренные выше определения соответствуют работе [16]. Они могут быть представлены как частные случаи одного более общего определения при помощи понятия момента n-го порядка пластины относительно заданной прямой.

Пусть имеются (рис. 1) прямая L и пластина D с областью S и функцией плотности $f(x,y)$. *Моментом n-го порядка пластины* D *относительно прямой* L называется $M_n(\mathrm{D}) = \iint\limits_{\mathrm{S}} \left(r(x,y)\right)^n f(x,y)dxdy$, где $r(x,y)$ – расстояние от точки (x,y) до прямой L. Заметим, что значение момента $M_n(\mathrm{D})$ не зависит от выбора системы координат, поскольку функции $f(x,y)$ и $r(x,y)$ при заданной прямой L – функции точки пластины. Легко заметить, что $M_0(\mathrm{D})$ – это масса $m(\mathrm{D})$ пластины D, $M_1(\mathrm{D})$ – это *статический момент пластины* D *относительно прямой* L, а $M_2(\mathrm{D})$ – это *момент инерции пластины* D *относительно прямой* L (хорошо известные определения статического момента и момента инерции можно найти, например, в § 53.6 учебника [25]).

Пусть прямая L делит пластину D на две подпластины – D_1 и D_2 – с областями S_1 и S_2 соответственно (рис. 2). Назовем прямую L *линией n-симметрии пластины* D, если $M_n(\mathrm{D}_1) = M_n(\mathrm{D}_2)$. Очевидно, что линии полумасс теперь оказываются линиями 0-симметрии, а линии равновесия – линиями 1-симметрии. Таким образом, линия 0-симметрии делит пластину на две подпластины так, что массы этих подпластин одинаковы, линия 1-симметрии – так, что статические моменты этих подпластин одинаковы, линия 2-симметрии – так, что их моменты инерции одинаковы.

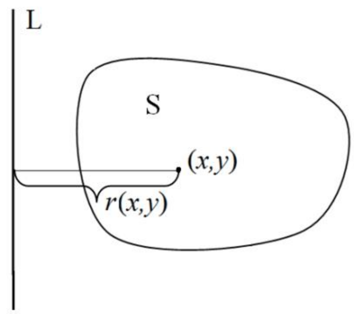

Рис. 1. Момент относительно прямой

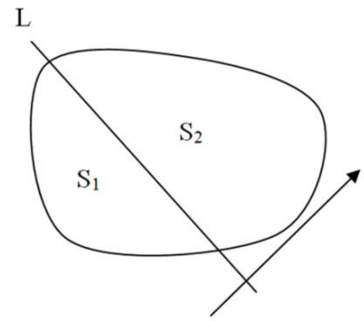

Рис. 2. Линия n-симметрии

Данная ниже лемма представляет собой обобщение лемм 1 и 2 из работы [16].

Лемма. *Существует единственная линия n-симметрии пластины* D*, параллельная данной прямой.*

Доказательство приведем тем же способом, что и доказательства лемм 1 и 2 в работе [16]. Пусть прямая L, проведенная параллельно некоторой изначально заданной прямой, делит пластину D на две подпластины – D_1 и D_2 – с областями S_1 и S_2 так, как показано на рис. 2. Будем перемещать прямую L, оставляя параллельной самой себе, в перпендикулярном ей направлении (в направлении, показанном на рис. 2 стрелкой). При этом разность интегралов

$$\iint\limits_{S_1} \left(r(x,y)\right)^n f(x,y)dxdy - \iint\limits_{S_2} \left(r(x,y)\right)^n f(x,y)dxdy$$

будет строго возрастать, так как первый из них будет увеличиваться (поскольку будет расти область S_1), а второй уменьшаться (поскольку будет сокращаться область S_2). Очевидно, что при одном крайнем положении (когда область S_1 очень мала) значение этой разности будет меньше нуля, а при другом (когда область S_2 очень мала) – больше нуля. Из соображений непрерывности можно заключить, что найдется единственное промежуточное положение прямой L, а именно такое, когда рассматриваемая разность будет равна нулю. Это положение прямой L и определит единственную линию n-симметрии пластины D, параллельную изначально заданной прямой.

В связи с доказанной леммой выглядит естественным следующее определение: *центром n-симметрии пластины* называется точка пересечения всех ее линий n-симметрии. Центр n-симметрии пластины существует в том и только том случае, когда все ее линии n-симметрии пересекаются в одной точке. Легко заметить, что центр 0-симметрии пластины является ее центром s-симметрии, а центр 1-симметрии – центром c-симметрии. Как было установлено в статьях [14, 15], центр 1-симметрии всегда существует, в то время как центр 0-симметрии может не существовать. Там же было показано, что в случае, когда существуют оба эти центра симметрии, они могут не совпадать.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Введенные в статье понятия и установленная лемма позволяют представить рассматривавшиеся ранее отдельно в статьях [14–20] для случая плоских пластин понятия c-симметрии и s-симметрии как частные случаи единого понятия n-симметрии.

При этом *s*-симметрия выступает как 0-симметрия, а *c*-симметрия – как 1-симметрия. Новое понятие 2-симметрии может оказаться полезным в случаях, когда возможно вращение рассматриваемой пластины вокруг заданной прямой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артамонов Б.А., Волков Ю.С., Дрожжалова В.И., Седыхин Ф.В., Смоленцев В.П., Ямпольский В.М. Электрофизические и электрохимические методы обработки материалов. В 2 т. М.: Высшая школа. 1983. 208 с.
2. Верещака А.С. Работоспособность режущего инструмента с износостойкими покрытиями. М.: Машиностроение. 1993. 336 с.
3. Вороничев Н.М., Тартаковский Ж.Э., Генин В.Б. Автоматические линии из агрегатных станков. М.: Машиностроение. 1979. 487 с.
4. Дальский А.М., Гаврилюк В.С. Механическая обработка материалов. М.: Машиностроение. 1981. 266 с.
5. Немилов Е.Ф. Электроэрозионная обработка материалов. Л.: Машиностроение. 1983. 160 с.
6. Подураев В.Н. Автоматически регулируемые и комбинированные процессы резания. М.: Машиностроение. 1977. 303 с.
7. Силин С.С. Метод подобия при резании материалов. М.: Машиностроение. 1979. 152 с.
8. Старков В.К. Обработка резанием. Управление стабильностью и качеством в автоматизированном производстве. М.: Машиностроение. 1989. 297 с.
9. Трент Е.М. Резание металлов. М.: Машиностроение. 1980. 263 с.
10. Участки для электроэрозионной обработки рабочих деталей вырубных штампов и пресс-форм / А.Т. Кравец [и др.]. М.: ОНТИ ЭНИМС. 1983. 47 с.
11. Этин А.О. Кинематический анализ и выбор эффективных методов обработки лезвийным инструментом. М.: Машгиз. 1953. 173 с.
12. Янюшкин А.С., Шоркин В.С. Контактные процессы при электроалмазном шлифовании. М.: Машиностроение-1. 2004. 230 с.
13. Ящерицын П.И., Фельдштейн Е.Э., Корниевич М.А. Теория резания. Минск: Новое знание. 2006. 512 с.
14. Шум Ал.А. О симметрии функций, определенных в круге // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2014. Вып. 25. С. 3–8.
15. Шум Ал.А. Замечание об *s*-симметричных функциях // *Вестник Тверского государственного технического университета.* 2015. Вып. 27. С. 3–6.
16. Шум Ал.А. О центрах симметрии функции двух переменных // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2016. Вып. 30. С. 19–23.
17. Шум Ал.А. О центрах симметрии функции, определенной в выпуклой области плоскости // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2017. Вып. 31. С. 19–22.
18. Шум Ал.А. Симметрическая линия функции двух переменных // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2017. Вып. 32. С. 103–105.
19. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Симметрическая линия правильного однородного треугольника // *Вестник Тверского государственного технического университета*. 2018. Вып. 34. С. 47–53.
20. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Параметрические уравнения симметрической линии правильного однородного треугольника // *Вестник Тверского государственного технического университета.* 2018. Вып. 34. С. 44–47.

21. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Замечание о симметрии функций, определенных в шаре // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Технические науки».* 2019. № 3 (3). С. 38–46.
22. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Об одном критерии *s*-симметрии функции трех переменных // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Технические науки»*. 2019. № 4 (4). С. 30–35.
23. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. О центрах симметрии функции трех переменных // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии».* 2020. № 1 (5). С. 71–78.
24. Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. О центрах симметрии функции, определенной в выпуклой области пространства // *Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии».* 2020. № 2 (6). С. 57–65.
25. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. М.: Айрис-пресс. 2007. 604 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ШУМ Александр Анатольевич – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет», 170026, Россия, г. Тверь, наб. Аф. Никитина, д. 22. E-mail: shum@tstu.tver.ru
ВЕТОШКИН Александр Михайлович – канд. техн. наук, доцент кафедры прикладной математики, информатики и вычислительной техники, Мытищинский филиал Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, 141005, Россия, Московская область, г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1. E-mail: vetkin@mgul.ac.ru
ШУМ Анатолий Александрович – магистрант факультета информационных технологий, ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет», 170026, Россия, г. Тверь, наб. Аф. Никитина, д. 22.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Шум Ал.А., Ветошкин А.М., Шум Ан.А. Моменты плоской пластины относительно прямой и некоторые вопросы симметрии // Вестник Тверского государственного технического университета. Серия «Строительство. Электротехника и химические технологии». 2021. № 2 (10). С. 78–84.

MOMENTS OF A FLAT PLATE RELATIVE TO A STRAIGHT LINE AND SOME QUESTIONS OF SYMMETRY

Al.An. Shum[1], A.M. Vetoshkin[2], An.Al. Shum[1]
[1]Tver State Technical University (Tver)
[2]Mytishchi filial of MSTU named after N. Uh. Bauman (Mytishchi, Moscow region)

Abstract. The concept of *n*-th order moment of a flat plate relative to a given straight line is considered. A straight line is declared to be a line of *n*-symmetry if the moments of the *n*-th order of two sub-plates into which the original plate is divided by this straight line are the same.

In this case, the lines of 0-symmetry turn out to be half-mass lines, and the lines of 1-symmetry – lines of equilibrium. The lemma proved earlier for half-mass lines and equilibrium lines can be carried over to the more general case of lines of *n*-symmetry.

Keywords: symmetry, *c*-symmetry, *s*-symmetry, center of symmetry, half-mass line, equilibrium line, density function, mass, center of mass, electric machine.

REFERENCES

1. Artamonov B.A., Volkov Yu.S., Drozhzhalova V.I., Sedykhin F.V., Smolentsev V.P., Yampolsky V.M. Elektrofizicheskie i elektrohimicheskie metody obrabotki materialov [Electrophysical and electrochemical methods of processing materials]. In 2 v. Moscow: Vysshaja shkola. 1983. 208 p.
2. Vereschaka A.S. Rabotosposobnost' rezhushchego instrumenta s iznosostojkimi pokrytiyami [The performance of the cutting tool with wear-resistant coatings]. Moscow: Mashinostroenie. 1993. 336 p.
3. Voronichev N.M., Tartakovsky J.E., Genin V.B. Avtomaticheskie linii iz agregatnyh stankov [Automatic lines of modular machines]. Moscow: Mashinostroenie. 1979. 487 p.
4. Dalskiy A.M., Gavrilyuk, V.S. Mekhanicheskaya obrabotka materialov [Mechanical treatment of materials]. Moscow: Mechanical Engineering. 1981. 266 p.
5. Nemilov E.F. Elektroerozionnaya obrabotka materialov [Electroerosion treatment of materials]. Leningrad: Mashinostroenie. 1983. 160 p.
6. Poduraev V.N. Avtomaticheski reguliruemye i kombinirovannye processy rezaniya [Automatically adjustable and combined cutting processes]. Moscow: Mashinostroenie. 1977. 303 p.
7. Silin S.S. Metod podobiya pri rezanii materialov [Method of similarity when cutting materials]. Moscow: Mashinostroenie. 1979. 152 p.
8. Starkov V.K. Obrabotka rezaniem. Upravlenie stabil'nost'yu i kachestvom v avtomatizirovannom proizvodstve [Cutting processing. Stability and quality management in automated production]. Moscow: Mashinostroenie. 1989. 297 p.
9. Trent E.M. Rezanie metallov [Metal cutting]. Moscow: Mashinostroenie. 1980. 263 p.
10. Uchastki dlya elektroerozionnoj obrabotki rabochih detalej vyrubnyh shtampov i press-form / A.T. Kravec [i dr.] [Areas for electrical discharge machining of working parts of cutting dies and molds / A.T. Kravec [etc]]. Moscow: ONTI ENIMS. 1983. 47 p.
11. Etin A.O. Kinematicheskij analiz i vybor effektivnyh metodov obrabotki lezvijnym instrumentom [Kinematic analysis and selection of effective methods of processing with a climbing tool]. Moscow: Mashgiz. 1953. 173 p.
12. Yanushkin A.S., Shorkin V.S. Kontaktnye processy pri elektroalmaznom shlifovanii [Contact processes in electro-diamond grinding]. Moscow: Mashinostroenie-1. 2004. 230 p.
13. Yastcheritsyn P.I., Feldshtein E.E., Korniewicz M.A. Teoriya rezaniya [Theory of cutting]. Minsk: Novoe znanie. 2006. 512 p.
14. Shum Al.A. On the symmetry of the functions defined in the circle. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. 2014. Vol. 25, pp. 3–8. (In Russian).
15. Shum Al.A. The comment about *s*-symmetric functions. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. 2015. Vol. 27, pp. 3–6. (In Russian).
16. Shum Al.A. About the centers of symmetry of a function of two variables. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. 2016. Vol. 30, pp. 19–23. (In Russian).

17. Shum Al.A. About the centers of symmetry of a function defined in a convex domain of the plane. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. 2017. Vol. 31, pp. 19–22. (In Russian).
18. Shum Al.A. Symmetric line of a function of two variables. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. 2017. Vol. 32, pp. 103–105. (In Russian).
19. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. The symmetric line of a regular homogeneous triangle. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. 2018. Vol. 34, pp. 47–53. (In Russian).
20. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. Parametric equations of the symmetric line of a regular homogeneous triangle. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. 2018. Vol. 34, pp. 44–47. (In Russian).
21. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. A note on the symmetry of functions defined in a ball. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. *Series «Technical Sciences»*. 2019. No. 3 (3), pp. 38–46. (In Russian).
22. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. On one criterion of *s*-symmetry of a function of three variables. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. *Series «Technical Sciences»*. 2019. No. 4 (4), pp. 30–35. (In Russian).
23. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. About the centers of symmetry of a function of three variables. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. *Series «Construction. Electrical Engineering and Chemical Technologies»*. 2020. No. 1 (5), pp. 71–78. (In Russian).
24. Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. About the centers of symmetry of the function, defined in a convex area of space. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. *Series «Construction. Electrical Engineering and Chemical Technologies»*. 2020. No. 2 (6), pp. 57–65. (In Russian).
25. Pismennyi D.T. Lecture notes on higher mathematics (full course). Moscow: Airis-press. 2007. 604 p.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

SHUM Alexander Anatolievich – Associate Professor of the Department of Mathematics, Tver State Technical University, 22, embankment of Af. Nikitin, Tver, 170026, Russia. E-mail: shum@tstu.tver.ru
VETOSHKIN Alexander Mikhailovich – Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Informatics and Computer Engineering, Mytishchi branch of Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, 1st Institutskaya street, Mytishchi city, Moscow region, 141005, Russia. E-mail: vetkin@mgul.ac.ru
SHUM Anatoliy Alexandrovich – Master's Student of the Faculty of Information Technologies, Tver State Technical University, 22, embankment of Af. Nikitin, Tver, 170026, Russia.

CITATION FOR AN ARTICLE

Shum Al.A., Vetoshkin A.M., Shum An.A. Moments of a flat plate relative to a straight line and some questions of symmetry // Vestnik of Tver State Technical University. Series «Building. Electrical engineering and chemical technology». 2021. No. 2 (10), pp. 78–84.